

**ANÁLISIS DE LA VIABILIDAD DE LA IMPLEMENTACIÓN DE MANIPULADORES
PARALELOS PLANOS EN LA INDUSTRIA REGIONAL**

JULIAN ESTEBAN AYALA GARCIA
CC: 1.088.312.580

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
PEREIRA 2017.

**ANÁLISIS DE LA VIABILIDAD DE LA IMPLEMENTACIÓN DE MANIPULADORES
PARALELOS PLANOS EN LA INDUSTRIA REGIONAL**

JULIAN ESTEBAN AYALA GARCIA
CC: 1.088.312.580

**Trabajo de grado presentado para optar al título de
Ingeniero Mecánico**

Director:
HECTOR FABIO QUINTERO RIAZA
Ingeniero Mecánico, MS.c, Ph.D.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
PEREIRA 2017.

Tabla de contenido

1.	INTRODUCCIÓN	7
1.1	OBJETIVO GENERAL.....	7
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	7
1.3	METODOLOGÍA	8
2.	ESTUDIOS DE NECESIDADES INDUSTRIÁ REGIONAL.....	9
2.1	ESTADÍSTICAS DE LAS ENCUESTAS.....	9
3.	SÍNTESIS DE TIPO DE MANIPULADORES.....	14
3.1	MANIPULADORES PLANOS DE DOS GRADOS DE LIBERTAD	14
3.1.1	Configuraciones estudiadas.....	14
3.1.2	Análisis de sensibilidad.....	17
	Tabla 2. Valoración de los manipuladores, continuación	20
3.1.3	Espacio de trabajo de los manipuladores planos de dos grados de libertad.....	20
3.1.4	Valoración de las configuraciones	23
3.2	MANIPULADORES PLANOS DE TRES GRADOS DE LIBERTAD	24
3.2.1	Configuraciones estudiadas.....	24
3.2.2	Análisis de sensibilidad.....	25
3.2.3	Espacio de trabajo de los manipuladores paralelos planos de tres grados de libertad	26
3.2.4	Valoración de las configuraciones	28
4.	ANÁLISIS CINEMÁTICO	30
4.1	MANIPULADORES DE DOS GRADOS DE LIBERTAD.....	30
4.1.1	Manipulador 2-RPR	30
4.1.2	Manipulador 2-RRR.....	34
4.1.3	Manipulador PRR-RRR	39
4.1.4	Manipulador PRR-RPR.....	43
4.2	MANIPULADORES DE TRES GRADOS DE LIBERTAD	48
4.2.1	Manipulador 3-RPR	48
4.2.2	Manipulador 3-RPR	54
4.2.3	Manipulador 3-RRR.....	60
5.	SÍNTESIS DIMENSIONAL DE LOS MANIPULADORES.....	66
5.1	MANIPULADORES DE DOS GRADOS DE LIBERTAD.....	68
5.1.1	Manipulador 2-RRR.....	68
5.2	MANIPULADORES DE TRES GRADOS DE LIBERTAD.....	70
5.2.1	Manipulador 3-RRR.....	70
6.	CONCLUSIONES, APORTES Y RECOMENDACIONES.....	73
6.1	CONCLUSIONES.....	73
6.1.1	73
6.1.2	73
6.1.3	73
6.2	APORTES	73
6.2.1	73

6.2.2.....	73
6.2.3.....	73
6.3 RECOMENDACIONES	73
6.3.1.....	73
6.3.2.....	73
BIBLIOGRAFIA	74

TABLA DE FIGURAS

Fig. 1 Porcentaje del número del tamaño de empresas visitadas	9
Fig. 2 Sectores industriales más comunes en la región.....	10
Fig. 3 Acciones de riesgo más comunes en la industria.....	10
Fig. 4 Nivel de automatización de las diferentes empresas en la región	11
Fig. 5 Tipo de máquinas más comunes utilizadas en los procesos industriales.....	12
Fig. 6 Procesos industriales más comunes en la regional	12
Fig. 7 Configuración de Manipuladores Paralelos Planos de Cinco Eslabones y dos Grados de Libertad	15
Fig. 8 Cinemática Directa del Manipulador 2-RRR	18
Fig. 9 Error de Posición en el Manipulador 2-RRR, alrededor del Punto $x_P = 80$ mm, $y_P = 100$ mm	19
Fig. 10 Espacio de trabajo de los manipuladores de dos grados de libertad.....	20
Fig. 11 Configuraciones de manipuladores de tres grados de libertad analizados	24
Fig. 12 Lugar geométrico del punto P en el manipulador 3-RRR alrededor de $x_P = 60$ mm, $y_P = 50$ mm y $\theta_7 = 30^\circ$	26
Fig. 13 Espacio de trabajo de los manipuladores paralelos planos de tres GDL	27
Fig. 14 Manipulador 2-RPR: actuadores rotativos.....	31
Fig. 15 Manipulador 2-RRR	34
Fig. 16 Cinemática directa en el manipulador 2-RRR	35
Fig. 17 Cinemática inversa del manipulador 2-RRR	36
Fig. 18 manipulador 2-PRR-RRR.....	39
Fig. 19 Doble configuración de ensamble del manipulador 2-PRR-RRR	40
Fig. 20 Análisis de la cinemática inversa, manipulador 2 PRR-RRR.....	41
Fig. 21 Manipulador 2-PRR-RPR.....	44
Fig. 22 Doble configuración de ensamble del manipulador 2-PRR-RPR.....	45
Fig. 23 Manipulador 3-RPR.....	48
Fig. 24 Espacio de trabajo del manipulador 3-RPR.....	48
Fig. 25 Configuraciones del manipulador 3-RPR para unas coordenadas de entrada	50
Fig. 26 Manipulador 3-RPR.....	54
Fig. 27 Espacio de trabajo del manipulador 3-RPR.....	55
Fig. 28 Esquema general del manipulador 3-RRR	60
Fig. 29 Operación de cruzamiento, algoritmos genéticos	66
Fig. 30 Mapa de destreza en la elipse de manipulabilidad del manipulador 2-RRR	70
Fig. 31 Mapa del índice de transferencia de fuerza en la elipse de manipulabilidad del manipulador 2-RRR	70
Fig. 32 Mapa de destreza en la elipse de manipulabilidad del manipulador 3-RRR	72
Fig. 33 Mapa del índice de transferencia de fuerza en la elipse de manipulabilidad del manipulador 3-RRR	72

INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Perfiles de mecanización y escalas de automatización	11
Tabla 2. Valoración de los manipuladores	19
Tabla 3. Espacio de trabajo de los manipuladores	22
Tabla 4. Valoración de las configuraciones de los manipuladores paralelos planos de dos GDL.....	23
Tabla 5. Análisis de sensibilidad de los manipuladores de tres grados de libertad, $x_P = 60$, $y_P = 50$, $\theta_7 = 30^\circ$	26
Tabla 6. Espacio de trabajo de los manipuladores paralelos planos de tres GDL	28
Tabla 7. Valoración de las configuraciones de los manipuladores paralelos planos de tres GDL	29
Tabla 8. Genes y rango del manipulador 2-RRR	69
Tabla 9. Valores de diseño del manipulador 2-RRR	69
Tabla 10. Genes y rango del manipulador 3-RRR	71
Tabla 11. Valores de diseño del manipulador 3-RRR	72

CAPITULO UNO

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado está integrado dentro del proyecto de investigación “DESARROLLO DE MANIPULADOR PARALELO DE TIPO PLANAR Y ESPACIALES CON VISIÓN ARTIFICIAL PARA ALTERNATIVA DE AUTOMATIZACIÓN PARA LA INDUSTRIA”, Código “8-16-3” financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones y Extensión de la Universidad Tecnológica de Pereira.

Los manipuladores de cadena cinemática abierta han tenido un grado de aceptación en el ámbito académico e industrial, ya que su cinemática es fácil de determinar, lo que promueve su mayor utilización en las aplicaciones de robótica para la industria, gracias a las ventajas que ofrecen en aplicaciones prácticas contribuyendo al desarrollo de la automatización y flexibilización de los procesos productivos, ya que pueden obtener mayores precisiones en los movimientos, aceleraciones, estructuras sin cargas de flexión, entre otros [1].

Debido a necesidades de la industria como incrementar la producción y realizar tareas peligrosas para el hombre, se desarrollaron mecanismos automatizados que realizan operaciones de producción de manera más rápida, segura y económica. A estos mecanismos automatizados se les llamó robots. Los robots fueron diseñados y construidos desde hace varias décadas con el objetivo de prestar servicios a los humanos en tareas repetitivas; en la industria, los robots se emplean para elaborar trabajos de pintura, soldadura, ensamble de piezas, entre otros. En el área aeroespacial, han sido utilizados como rescatadores de satélites, en la recolección de muestras, en la exploración de terrenos y para labores de mantenimiento de las estaciones espaciales. Muchas aplicaciones que hace décadas se consideraban imposibles de realizar, hoy son realidad [2].

Existe una gran variedad de familias de robots. Los más utilizados en la industria son los llamados manipuladores seriales y manipuladores paralelos. Los primeros, mucho más utilizados y estudiados que los segundos, especialmente en lo que respecta a su fabricación y su control. Sin embargo, esta configuración en serie supone también una pérdida de dinamismo: cada accionamiento tiene que llevar el peso de los que le siguen. Son configuraciones con grandes masas en movimiento, por lo que resulta complicado obtener velocidades altas de trabajo [3].

En los últimos años se ha presentado un creciente interés de los investigadores en los manipuladores paralelos debido a sus ventajas sobre sus contrapartes los seriales, esto se debe a que, sin importar que los manipuladores paralelos tengan actuadores fijos en su estructura, o que se muevan muy próximos a ella, ninguno de los actuadores debe llevar el peso de otro cuando realiza un movimiento, todos ellos conectan la estructura fija con el cabezal de trabajo o la herramienta final. Por estas características las cadenas cinemáticas y los sistemas de accionamiento pueden ser más pequeños, lo que permite aumentar la masa útil que se puede mover con el manipulador.

Pese a estas ventajas, el uso de los manipuladores paralelos es limitado debido a que el análisis de su topología sigue siendo muy complejo. Por esto, en la comunidad científica aumentan las investigaciones y publicaciones de trabajos que abordan los problemas aún sin resolver. En la actualidad la comunidad científica nacional e internacional trata de dar solución a problemáticas tales como:

- La cinemática, la definición de las posiciones singulares y la construcción del modelo dinámico son más complicados que para el caso serie. La mayoría de las veces esto se resuelve de manera particular para cada configuración de robot, ya que no existen ecuaciones generales aplicables a todos ellos.
- El espacio de trabajo es más pequeño y más difícil de definir, un manejo de las singularidades muy particular para cada estructura, y una mayor exigencia en los algoritmos de control dada la alta dinámica que proporcionan estas estructuras [1].

A pesar de las características de funcionamiento de los manipuladores paralelos, no existen adaptaciones de este tipo de tecnologías en la industria nacional. Los desarrollos y avances se limitan a los ambientes académicos, no existen investigaciones orientadas a establecer e identificar los sectores productivos en las que el uso de este tipo de tecnologías genere valor agregado al producto final, o que permitan al sector en específico ser más competitivo en una economía globalizada.

En este trabajo de grado se propone una alternativa de cambio en la tecnología de la industria nacional, buscando una mejora considerable en las actividades referentes a cada empresa en particular, que puedan ser mejoradas por los manipuladores paralelos.

1.1 OBJETIVO GENERAL

Realizar un análisis de la viabilidad de implementación de diferentes configuraciones de mecanismos planos paralelos basado en las necesidades de la industria regional, este estudio estará centrado en identificar las configuraciones de manipuladores paralelos que se ajusten a las necesidades identificadas, y realizar su síntesis morfológica.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realizar un diagnóstico de las necesidades de la industria regional de automatización de sus procesos industriales y determinar en cuales es viable la implementación de manipuladores paralelos.
- Estudiar y evaluar configuraciones de manipuladores paralelos espaciales y planares que por su arquitectura presenten ventajas para el desarrollo de tareas tecnológicas aplicables a la industria nacional.
- Realizar la síntesis morfológica y dimensional de los manipuladores paralelos planos seleccionados, buscando establecer los parámetros físicos primarios que definen su geometría.
- Estudiar el comportamiento cinemático de las arquitecturas seleccionadas, con el fin de obtener los modelos matemáticos de la posición, velocidad y aceleración del elemento terminal de los manipuladores.

1.3 METODOLOGÍA

Buscando alcanzar los objetivos propuestos se desarrollarán las etapas que se describen a continuación:

Etapas 1: Se realizará un diagnóstico del nivel de implementación de manipuladores de la región identificando los procesos en los que se utilizan. Simultáneamente se realizará una valoración de los posibles procesos de implementación.

Etapas 2: Teniendo en cuenta la necesidad del sector industrial en el ámbito regional o nacional, se estudiarán las configuraciones de manipuladores paralelos espaciales y planares que puedan implementarse en este sector, seleccionando aquellas arquitecturas que presenten ventajas para el desarrollo de tareas tecnológicas aplicables a la industria nacional. Para ello se definirán los requisitos de funcionamiento que ha de cumplir el manipulador desarrollando determinada aplicación, junto con las especificaciones que un posible cliente desearía.

Etapas 3: Selección de la morfología del manipulador y cálculo de las variables geométricas para la construcción de los manipuladores paralelos y espaciales: una vez seleccionado las arquitecturas a utilizar en el desarrollo del proyecto, se procederá con la síntesis morfológica que permitirá determinar cuáles han de ser las cadenas cinemáticas que constituirán los manipuladores seleccionados, con el objeto de que su elemento terminal sea capaz de generar el movimiento deseado establecido en los requisitos de funcionamiento. En este paso se definirán las cadenas cinemáticas a emplear con el propósito de generar determinados movimientos del elemento terminal, luego se obtendrán las posibles arquitecturas que serían capaces de generar los movimientos requeridos, de las cuales se debe seleccionar las más adecuada teniendo en cuenta aspectos tales como la rigidez ofrecida, facilidad en la fabricación, disminución del desgaste y fricción en las articulaciones, y el bajo costo. Después de tener definida las arquitecturas para cada manipulador, se procederá con la síntesis dimensional de los manipuladores paralelos planos, que establecerán los parámetros físicos primarios que definirán la geometría de las arquitecturas seleccionadas, garantizando el espacio de trabajo definido en los requisitos de funcionamiento y disminuyendo las posiciones singulares.

Etapas 4: Síntesis de los manipuladores seleccionados: Se realizará la síntesis dimensional de las configuraciones de manipuladores planos seleccionados, utilizando métodos computacionales basados en los algoritmos genéticos y los criterios requeridos para su uso como el espacio de trabajo y cinemática de los manipuladores.

Etapas 5: Estudio cinemático los manipuladores paralelos planos seleccionados: A continuación, se realizará el análisis cinemático con el fin de obtener los modelos matemáticos de la posición, velocidad y aceleración del elemento terminal, por medio del cálculo de la cinemática directa por polinomio [11], para luego ser introducidos en un software (Matlab) siendo de gran ayuda para procedimientos posteriores.

CAPÍTULO DOS

2. ESTUDIOS DE NECESIDADES INDUSTRIÁ REGIONAL

Para lograr obtener una idea más clara del nivel de automatización de la región (Risaralda), en algunas empresas se realizó una serie de preguntas relacionadas con los procesos que son o pueden ser efectuados por manipuladores planos, desde las macros hasta las micro empresas, comprendiendo así, el abarcar los diferentes niveles de automatización de cada empresa.

Siendo la implementación de manipuladores planos paralelos de gran importancia, ya que reduce considerablemente la mano de obra, el esfuerzo del operario y simplifica el trabajo haciendo posible que los procesos industriales sean más rápidos y eficientes, posibilitando que las empresas mejoren su desempeño al reducir los errores y mejorar la calidad; y en algunos casos puede llevar a lograr resultados que vayan más allá de la capacidad humana.

La automatización ayuda a las empresas a conseguir diferentes ventajas sobre el tradicional control manual del proceso [2]:

- mejora de calidad del trabajo del operador de la máquina o instalación y en el desarrollo del proceso.
- reducción de costo, racionalización del tiempo de trabajo y mantenimiento.
- mayor flexibilidad para adaptarse a nuevos productos.
- reducción de la contaminación y daño ambiental.
- aumento de la protección y seguridad de los trabajadores.

Siendo este el propósito de la encuesta el de conocer si la compañía ha sido organizada atendiendo el proceso de desarrollo y la manufactura del producto o es necesario la implementación de manipuladores. Es importante definir la necesidad de manipuladores dentro de la compañía porque ella influye en la manera como se adaptan a la corrección de las situaciones de fallas de producción, adaptación a nuevas necesidades del usuario, etc. Y de esta manera poder sugerir la viabilidad de la automatización teniendo en cuenta si los beneficios económicos y sociales de las mejoras que se podrían obtener al automatizar sean mayores al coste de operación y mantenimiento del sistema.

En el proceso de diagnóstico se visitaron 18 empresas teniendo en cuenta entre ellas: el tamaño, el sector, acciones de riesgo, nivel de automatización de las máquinas, tipo de proceso y máquinas utilizadas.

Basados en las necesidades de las empresas encuestadas se realizó un análisis de la viabilidad de implementación de diferentes configuraciones de mecanismos planos paralelos, y así identificar los mecanismos que mejor se ajusten a dicha necesidad.

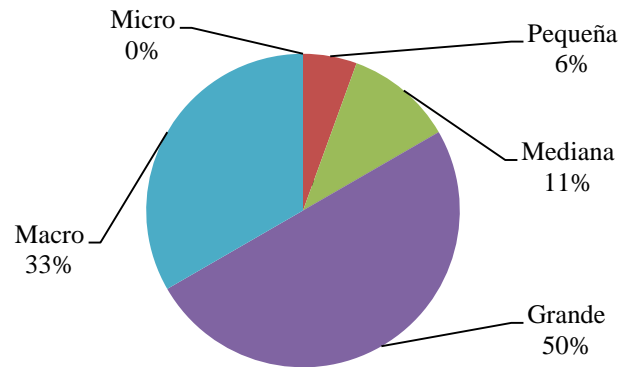
2.1 ESTADÍSTICAS DE LAS ENCUESTAS

2.1.1 Tamaño de la empresa

La automatización de las actividades puede habilitar el crecimiento de la productividad y otros beneficios, tanto a nivel de los procesos y negocios individuales, como a nivel de economías completas donde la necesidad de acelerar la mejora en productividad es extrema. A nivel microeconómico, las empresas pueden tener la oportunidad de conseguir beneficios y lograr ventajas competitivas gracias a las tecnologías de automatización. Por ejemplo, reducciones de costo de mano de obra, beneficios del desempeño como son una mayor producción, mejor calidad y menores tiempos muertos. A nivel macroeconómico, la automatización podría aumentar el crecimiento de la productividad. En la Fig. 1, se muestra el porcentaje de empresas encuestadas acorde con su tamaño, el tamaño de la empresa está basado en [2].

Fig. 1 Porcentaje del número del tamaño de empresas visitadas

TAMAÑO DE LA EMPRESA

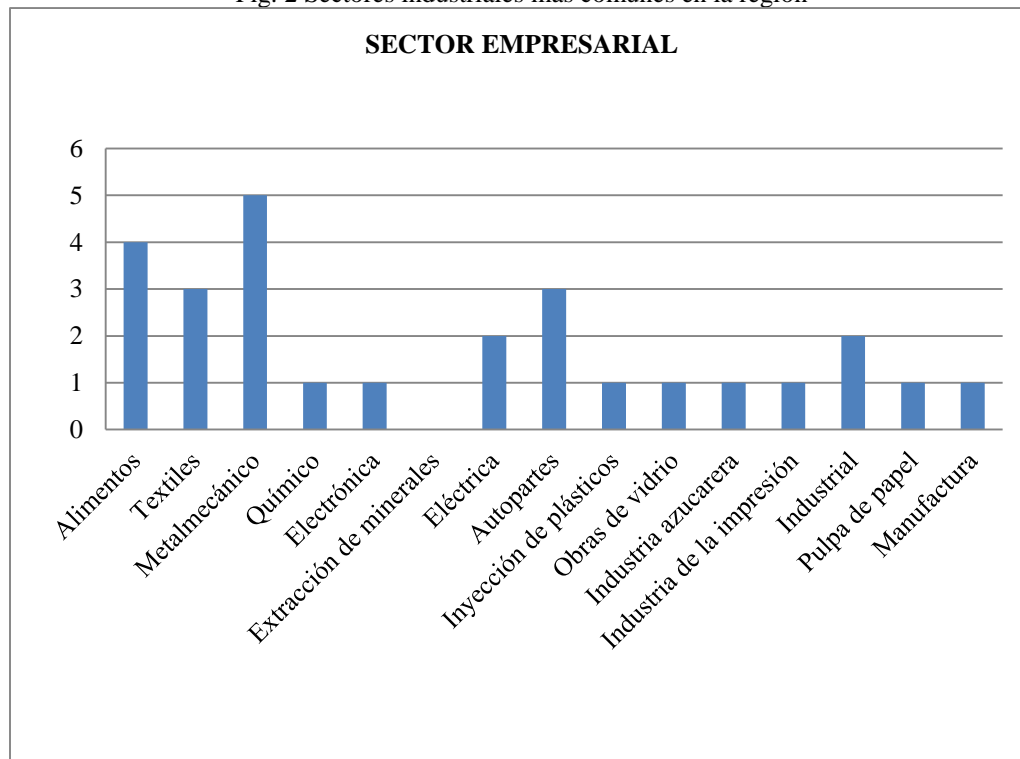


2.1.2 Sector empresarial

El grado de potencial que pueda alcanzar la automatización varía considerablemente entre los sectores de la economía y entre las profesiones dentro de esos sectores, implicando que la actividad física predecible es la de mayor potencial, encontrándose esta en los sectores de la manufactura, alimentos, soldadura y metalmecánico.

En la Fig. 2, se presenta el análisis de la distribución de las empresas encuestadas, entre ellos el sector metalmecánico, autopartes, textiles y de alimentos.

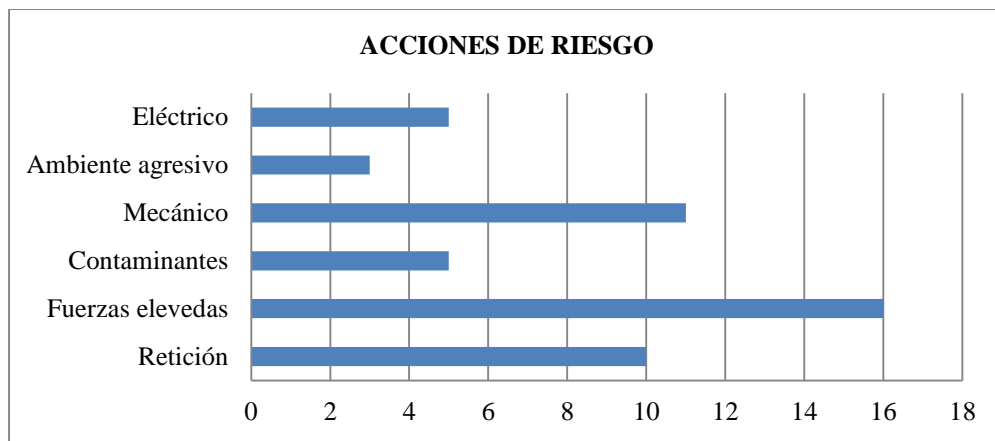
Fig. 2 Sectores industriales más comunes en la región



2.1.3 Acciones de riesgo

En la Fig. 3, se muestra el número de accidentes de las empresas encuestadas, también se muestra cuáles de esas actividades se pueden reemplazar por la implementación de los manipuladores paralelos planos para evitar dichos accidentes, siendo así las actividades que involucran fuerzas elevadas las de mayor riesgo en la industria.

Fig. 3 Acciones de riesgo más comunes en la industria



2.1.4 Nivel de automatización

En la Fig. 4, se logra apreciar el nivel de automatización de las empresas encuestadas, siendo los procesos semiautomáticos y automáticos los más utilizados en estas, por lo tanto se sugiere la implementación de los manipuladores paralelos planos en las diferentes empresas que así lo necesiten, contribuyendo con el desarrollo de la región. Acorde con los resultados, se puede decir que las empresas encuestadas se encuentran entre las escalas 5-7, acorde con el nivel de automatización propuesto en [4], ver Tabla 1.

Fig. 4 Nivel de automatización de las diferentes empresas en la región

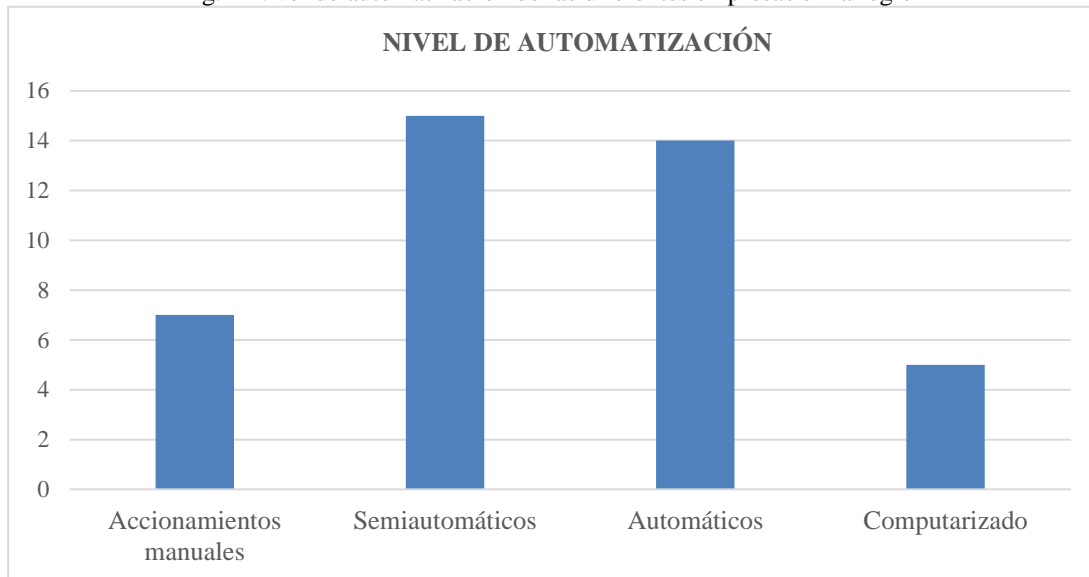


Tabla 1. Perfiles de mecanización y escalas de automatización [25]

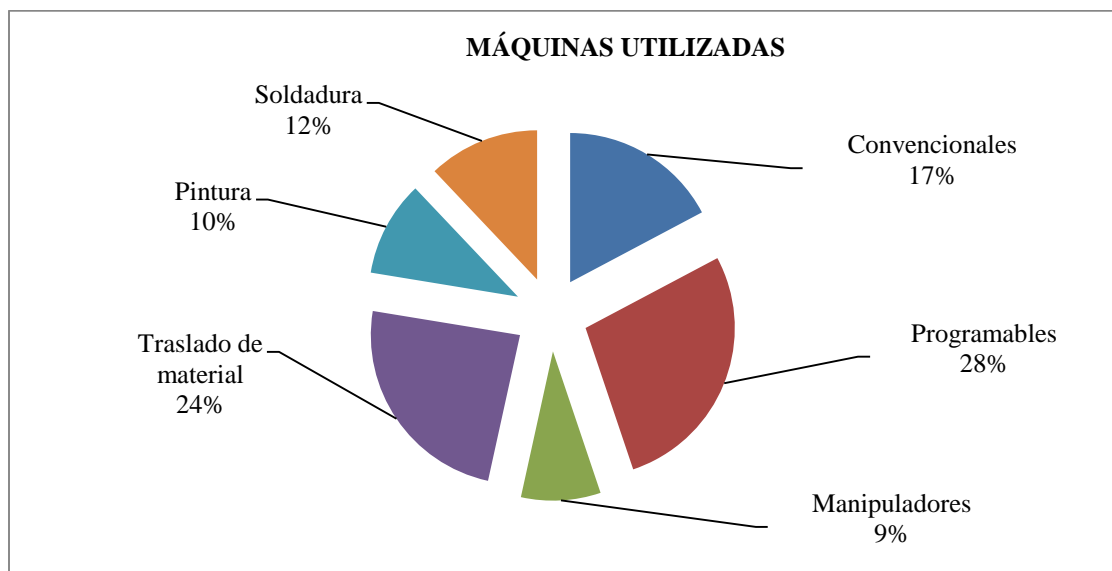
PERFIL DE MECANIZACIÓN (BRIGHT, 1956)	ESCALAS DE LOS GRADOS DE AUTOMATIZACIÓN (SHERIDAN, 1994)
1. Mano	1. La computadora no ofrece asistencia, el hombre debe hacerlo todo.
2. Herramienta manual	2. La computadora ofrece acciones alternativas.
3. Herramienta manual asistida	3. La computadora ofrece acciones alternativas reduciendo la selección a unas pocas.
4. Herramienta asistida, control manual	4. La computadora ofrece acciones alternativas, sugiere una.
5. Herramienta asistida, ciclo fijo.	5. La computadora ofrece acciones alternativas, sugiere una y la ejecuta si se aprueba.
6. Herramienta asistida, control programado	6. La computadora ofrece acciones alternativas, sugiere una, da tiempo al operario para abortar antes de ejecutar.

7. Sistemas de herramienta asistida (control remoto).	7. La computadora ofrece acciones alternativas, sugiere una, ejecuta automáticamente, informa al operario.
8. Actuación por la introducción de la pieza de trabajo o el material	8. La computadora ofrece acciones alternativas, sugiere una, ejecuta automáticamente, informa al operario si éste pregunta.
9. Mide la característica del trabajo	9. La computadora ofrece acciones alternativas, sugiere una, ejecuta automáticamente, informa al operario si la computadora lo decide.
10. Señaliza valores preseleccionados de las mediciones.	10. La computadora lo decide todo y actúa automáticamente, ignora al hombre.
11. Registra el desempeño.	
12. Cambia la velocidad, posición, dirección de acuerdo con las señales medidas.	
13. Separa o rechaza de acuerdo con la medida.	
14. Identifica y selecciona un conjunto apropiado de acciones.	
15. Corrige el desempeño después de operar	
16. Corrige el desempeño mientras opera.	
17. Anticipa la acción requerida y se ajusta para proveerla.	

2.1.5 Máquinas utilizadas

En la Fig. 5, se encuentra el análisis del tipo de máquinas más utilizadas en los procesos industriales de las empresas encuestadas, esto con el fin, de reconocer cuales pueden ser reemplazados por manipuladores paralelos planos y así incrementar el mismo desarrollo de ellas, las máquinas utilizadas en las empresas encuestadas se encuentran en el rango de 6-8, ver Tabla 1.

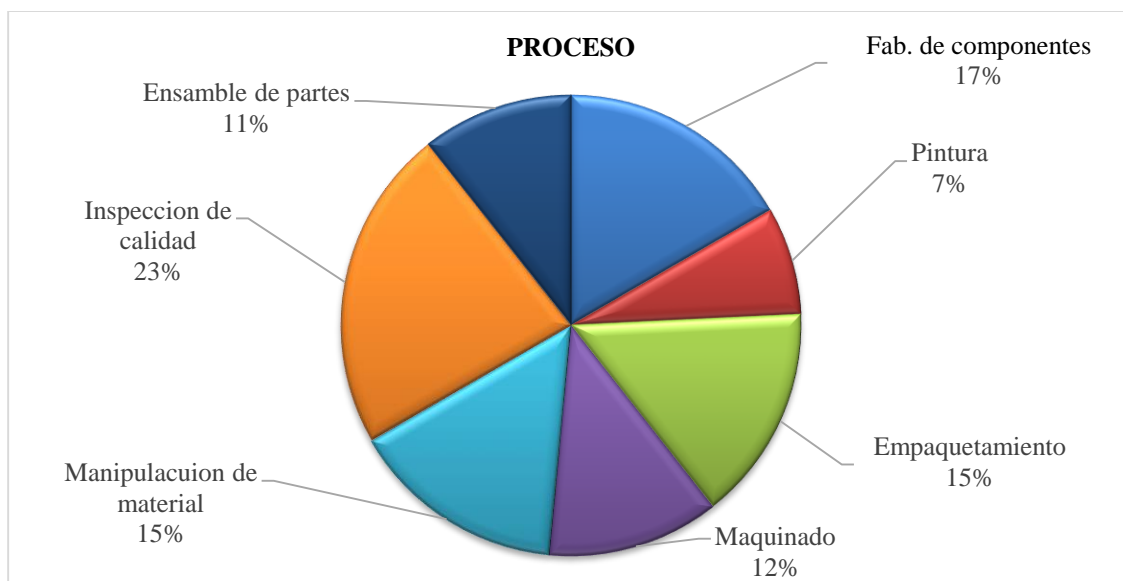
Fig. 5 Tipo de máquinas más comunes utilizadas en los procesos industriales



2.1.6 Proceso

En la Fig. 6, se plasman los procesos industriales más comunes en las empresas encuestadas en los cuales es más fácil predecir la viabilidad de la adopción de manipuladores paralelos planos, causando así un impacto favorable en el proceso, sin dejar atrás los demás, pero teniendo en cuenta el gran abismo del potencial de automatización que existe entre ellos.

Fig. 6 Procesos industriales más comunes en la regional



Por tanto, para cada tipo de aplicación es necesario determinar cuál es la arquitectura de robot o máquina que mejor se adapta a ella y que mejores prestaciones produce.

La implementación de manipuladores en la industria regional, puede verse reflejada en el aumento del nivel de producción, en el reemplazo de trabajos peligrosos realizados manualmente, en el aumento de tiempos de producción y eliminación de tiempos muertos, en el aumento de la calidad; Estas son algunas de las necesidades en las empresas de la región.

Ya que la mayoría de las empresas cuenta con maquinaria semiautomática o automática, se debe tener en cuenta que las necesidades de las empresas las podrá suplir un manipulador que a su vez reemplazará una actividad o tarea y ayudará a reducción de costos, aumento en la producción y en la calidad.

Todas aquellas pequeñas y medianas empresas que deseen expandirse lo podrán lograr con la implementación de manipuladores para lograr ser más competitiva reemplazando las actividades que pueden ser mejoradas por los manipuladores paralelos.

1. Casi un 20% del total de las empresas visitadas fue en empresas pequeñas y medianas, debido a que la mayoría de estas empresas en la región se dedican a un campo industrial muy similar, por lo tanto, la maquinaria y actividades que en ellas se realizaban no tenían gran diferencia, en estas empresas se contaba con maquinaria semiautomática, con varios años de uso, a las cuales el mantenimiento era bastante constante, predominando en éstas el campo de la metalmecánica, industrias de la impresión.
2. Un 80% del total de empresas visitadas fue en empresas grandes y macros, debido a su gran variedad en el campo industrial, siendo el sector eléctrico junto con el de manipulación de material como los más tecnificados. En el sector de autopartes, manufactura y alimentos, todavía se cuenta con una mano de obra muy fuerte que puede ser posible reemplazarlas; en este sector se cuenta con maquinaria de accionamiento manual donde la actividad depende totalmente de la mano de obra.

Los sectores con mayor necesidad de cambio de tecnología son:

Manufactura: La necesidad en el sector textil, autopartes de cortar más rápido y de mejor calidad el material utilizado para la producción reluce con el incremento del comercio en la región.

Autopartes: La necesidad del sector automotor de tecnificar sus actividades es de vital importancia para la empresa, ya que la mayoría de sus actividades son muy artesanales.

Agroindustria: La selección y el empaquetamiento del café todavía sigue siendo muy manuales, la necesidad de implementar tecnología surge rápidamente.

Concluyendo este capítulo, tomando las estadísticas anteriores, la automatización de la región tendría un gran impulso en los sectores de manufactura, alimentos, soldadura, y metalmecánico; ya que en las posibles actividades presentes en estos se posibilita el aumento del desempeño, y productividad de las empresas, dando así un enorme salto a las micro y pequeñas empresas la oportunidad de entrar a competir.

El gran potencial que los manipuladores paralelos ofrecen debe ser implementado por la industria con mayor necesidad en el incremento de su productividad, como lo son las micro y pequeñas empresas dedicadas a la fabricación de componentes, maquinado, y empaquetamiento.

En la adopción de esta nueva tecnología los posibles accidentes ocurridos en las acciones por fuerzas elevadas y repetición serán disminuidos de manera drástica gracias a las ventajas presentes en los manipuladores paralelos.

Dando un anexo a este capítulo se presenta el listado de las empresas encuestadas:

- | | |
|----------------------------------|------------------------------|
| 1. Graficas Buda. | 10. Cenicafé. |
| 2. Papeles Nacionales S.A. | 11. Racafé. |
| 3. Normarh SAS. | 12. Co & Tex S.A.S. |
| 4. Cristar S.A. | 13. Incoco S.A. |
| 5. Ingeniar Inoxidable. | 14. Guillermo Pulgarin S.S.A |
| 6. Suzuki Motor de Colombia S.A. | 15. Exco Colombiana. |
| 7. Busscar de Colombia S.A.S. | 16. Audifarma S.A. |
| 8. Ingenio Risaralda S.A. | 17. Magnetron SAS. |
| 9. La Rosa. | 18. ABB. |

CAPÍTULO TRES

3. SÍNTESIS DE TIPO DE MANIPULADORES

Los manipuladores paralelos son sin duda un tipo de mecanismos de un presente y futuro prometedores en un gran número de aplicaciones industriales, presentando una serie de importantes ventajas sobre los manipuladores serie, siempre y cuando su diseño haya sido realizado para la realización de un tipo de operación concreto. La peculiar característica de este tipo de manipuladores ha hecho que ciertas arquitecturas hayan encontrado un perfecto acomodo en determinado tipo de aplicaciones, como la realización de operaciones de pick & place o ciertas operaciones de mecanizado. Además, el desarrollo de nuevas arquitecturas de este tipo de manipuladores es un proceso en constante actividad, ya que día a día van apareciendo nuevas posibilidades. Sin embargo, la mayoría de estos nuevos manipuladores quedan limitados a la realización de estudios teóricos o simplemente experimentales, debido a que la complejidad de sus cinemáticas, la dificultad de su control en tiempo real, la ausencia de técnicas de calibración totalmente sistematizadas, etc., hacen que la industria sea todavía reticente a utilizar este tipo de mecanismos [5].

Este capítulo se centra en los denominados manipuladores paralelos de baja movilidad, capaces de realizar movimientos de dos y tres grados de libertad de unas determinadas características, esto es, realizando un número específico de movimientos de rotación y/o traslación, y utilizando pares de rotación o prismáticos.

En el desarrollo del tema, se aborda, en primer lugar, un procedimiento de síntesis morfológica de las 16 arquitecturas de dos grados de libertad y de las 6 arquitecturas de tres grados de libertad y realizando un análisis exhaustivo de las diferentes cadenas cinemáticas que se han de utilizar para la definición de un manipulador de cinemática paralela. Sin embargo, a pesar que varias arquitecturas de este tipo de manipuladores sean capaces de realizar un mismo tipo de movimiento, esto no hace que todas ellas ofrezcan unas prestaciones idénticas, lo cual implica que deberían analizarse por completo todas las diferentes alternativas antes de poder elegir cuál de todas ellas es la que mejor se adapta a los requisitos concretos. Además, en muchas aplicaciones industriales de manipuladores planos se requiere tener precisión para seguir una trayectoria determinada. Esta precisión requiere identificar las posibles fuentes de error e integrarla en los métodos computacionales. Entre las fuentes de error más conocidas están los errores debido a la manufactura, holguras en los pares cinemáticos, y juegos en los actuadores [6]. El análisis de la sensibilidad en un manipulador ayuda al conocimiento de la influencia de las variaciones en los parámetros geométricos sobre su desempeño. Esta información es útil para la evaluación del error en la pose del elemento terminal. Los tres principales métodos para el análisis de sensibilidad en la literatura teniendo en cuenta los parámetros geométricos y las holguras de las juntas cinemáticas en manipuladores paralelos y seriales son: (i) el método probabilístico [7], (ii) el método de linealización [8], y (iii) el método de análisis por intervalo [1]. Si bien estos trabajos analizan la influencia de la sensibilidad de manipuladores paralelos serie y paralelo, no tienen en cuenta aspectos constructivos importantes para la decisión final.

Para la síntesis se establece una tabla de diseño en que se tiene en cuenta (i) sensibilidad del mecanismo considerando errores en los parámetros geométricos y errores en la señal del actuador, (ii) espacio de trabajo del manipulador, y (iii) facilidad de

la fabricación del manipulador. Basado en este diseño se muestran las configuraciones de manipuladores de mejor funcionamiento acorde con los criterios establecidos.

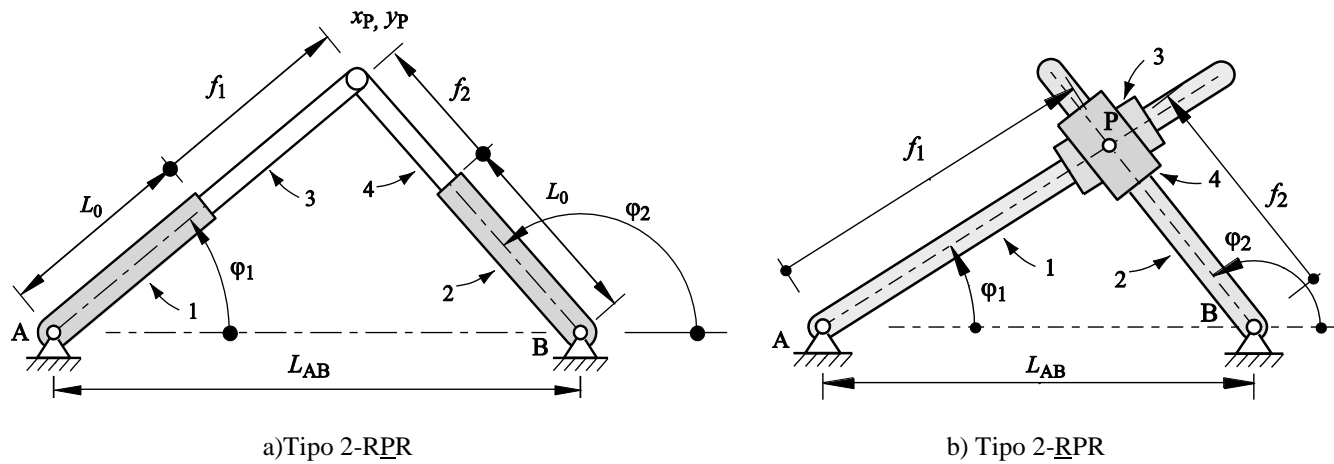
3.1 MANIPULADORES PLANOS DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

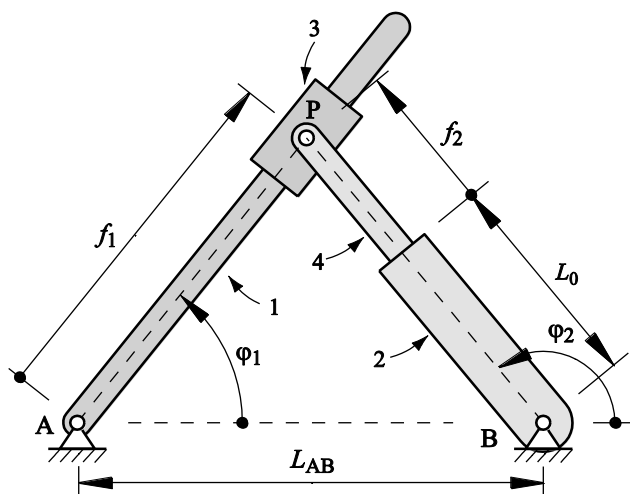
En un manipulador paralelo plano de dos grados de libertad se tiene control de la posición del elemento terminal (x_P, y_P), sin tener control de la orientación. Se obtienen diferentes configuraciones de manipuladores con cinco eslabones y dos grados de libertad considerando el tipo de actuador, lineal o rotativo, y el tipo de par cinemático entre los eslabones, de rotación o prismáticos.

3.1.1 Configuraciones estudiadas

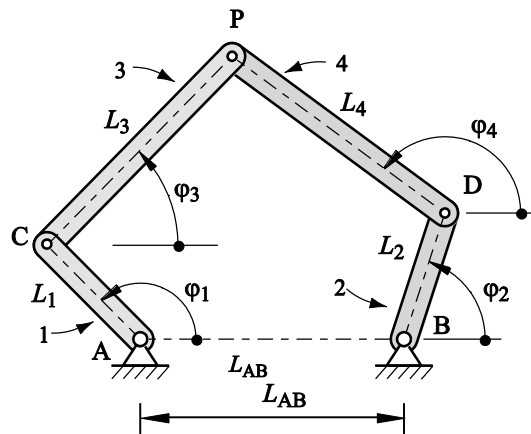
En la Fig. 7 se presenta las configuraciones de manipuladores de dos grados de libertad analizadas. Las diversas configuraciones se obtienen utilizando pares de rotación (R), o pares prismáticos (P). Otra alternativa consiste en utilizar actuadores rotativos (R), o actuadores lineales (P). Se utilizará el subrayado para indicar un par accionado por un actuador.

Fig. 7 Configuración de Manipuladores Paralelos Planos de Cinco Eslabones y dos Grados de Libertad

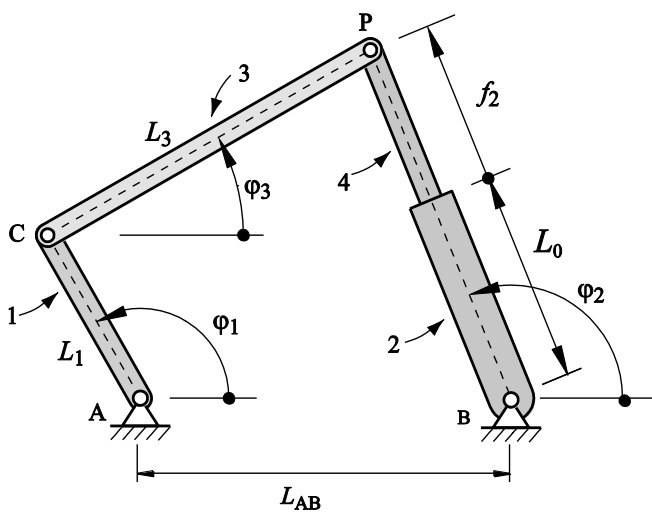




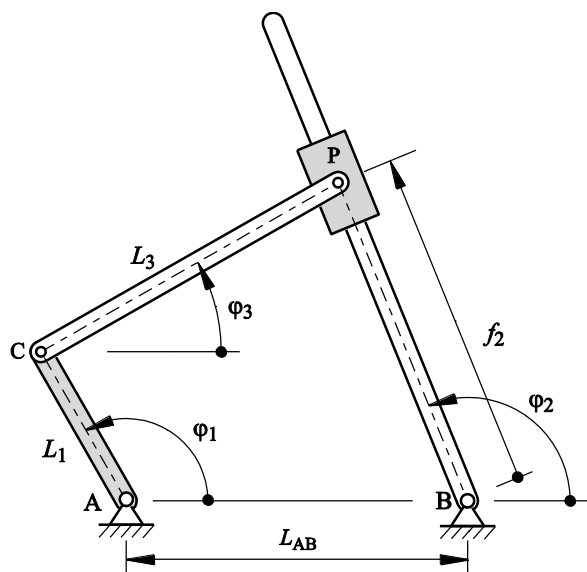
c) Tipo $\underline{RPR-RPR}$



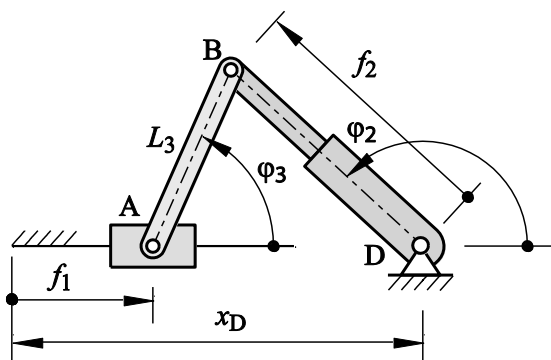
d) Tipo 2- \underline{RRR}



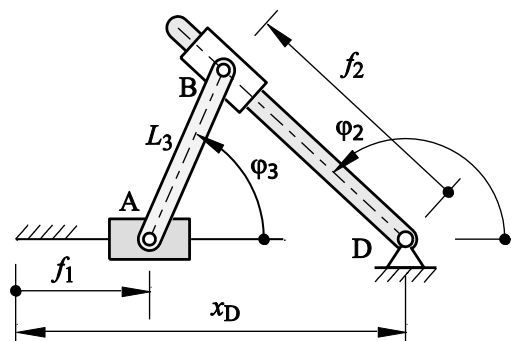
e) Tipo $\underline{RRR-RPR}$



f) Tipo $\underline{RRR-RPR}$

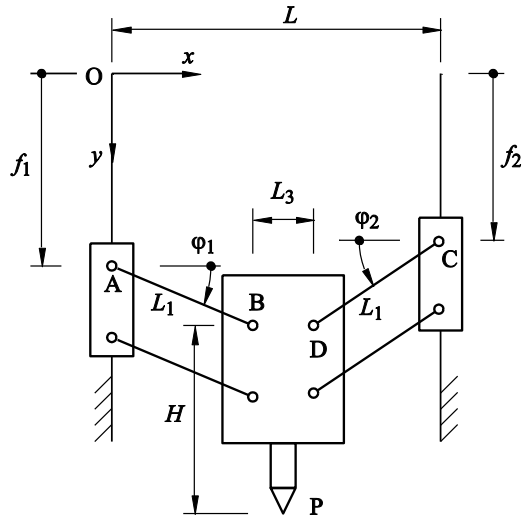


g) Tipo $\underline{PRR-RPR}$

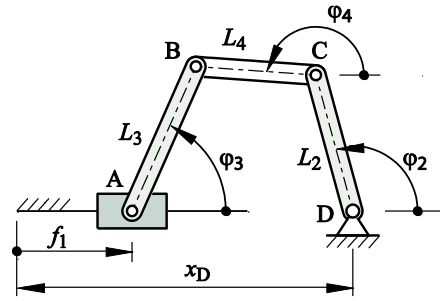


h) Tipo $\underline{PRR-RPR}$

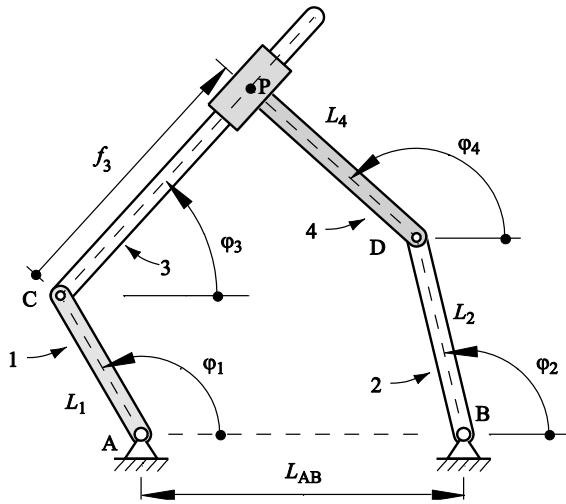
Fig. 7 Configuración de Manipuladores Paralelos Planos de Cinco Eslabones y dos Grados de Libertad, continuación



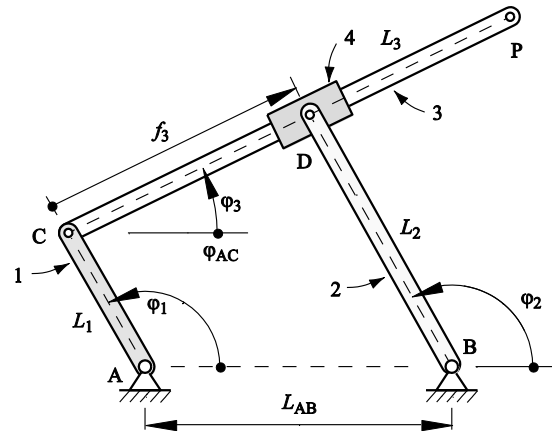
i) Doble paralelogramo



j) Tipo PRR-RRR

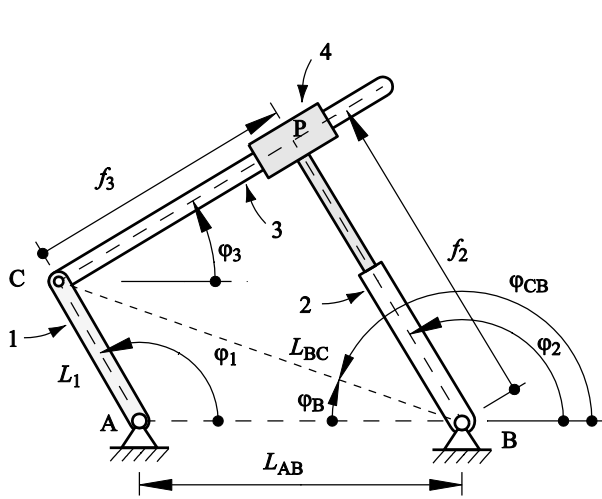


k) Tipo 2-RRP

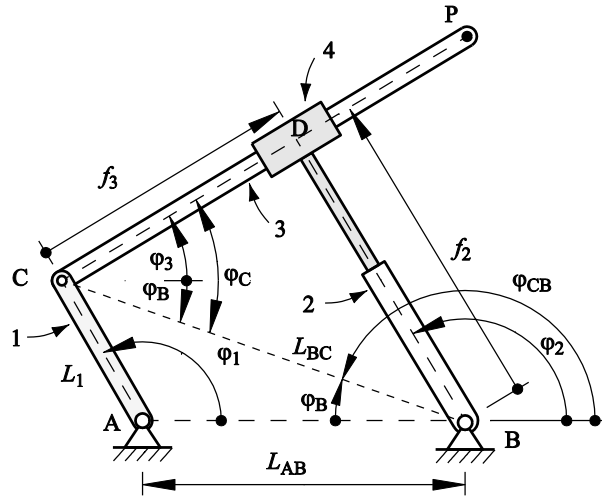


l) Tipo 2-RRP, versión 2

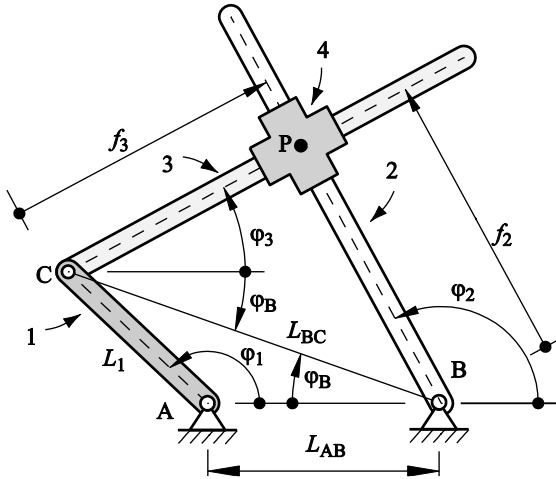
Fig. 7 . Configuración de Manipuladores Paralelos Planos de Cinco Eslabones y dos Grados de Libertad, continuación



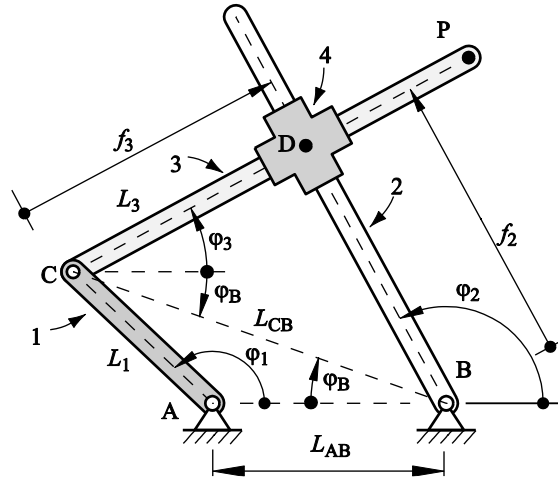
m) Tipo RRP-RPP, versión 1



n) Tipo RRP-RPP, versión 2



o) Tipo RRP-RPP, versión 1



p) Tipo RRP-RPP, versión 2

3.1.2 Análisis de sensibilidad

En este trabajo se realizará el análisis de sensibilidad considerando el error debido a los parámetros geométricos y el debido a la señal de control de los actuadores. El error se determina como la distancia del punto deseado (x_p, y_p), hasta la posición final obtenida por el mecanismo. En el error debido a los parámetros geométricos se considera un error en las dimensiones de los eslabones dado por:

$L_{k,real} = L_{k,teórico} + \Delta L$	Ec. 1
---	-------

siendo $L_{k,real}$ la longitud real del eslabón k , $L_{k,teórico}$ la longitud teórica del eslabón, y ΔL la variación del eslabón debido a errores de fabricación ($\Delta L = \pm 1$ mm).

Los errores en la señal de los actuadores requieren diferenciar en el caso de un actuador lineal y un actuador rotativo. El error en el actuador lineal está dado por:

$f_{k,real} = f_{k,teórico} + \Delta f$	Ec. 2
---	-------

siendo $f_{k,real}$ el valor real de la variable lineal del actuador k , $f_{k,teórico}$ el valor real del actuador, y Δf el error inducido por la señal de control del actuador ($\Delta f = \pm 5$ mm).

Para el actuador rotativo, el valor real de la variable angular está dado por:

$\varphi_{k,real} = \varphi_{k,teórico} + \Delta\varphi$	Ec. 3
--	-------

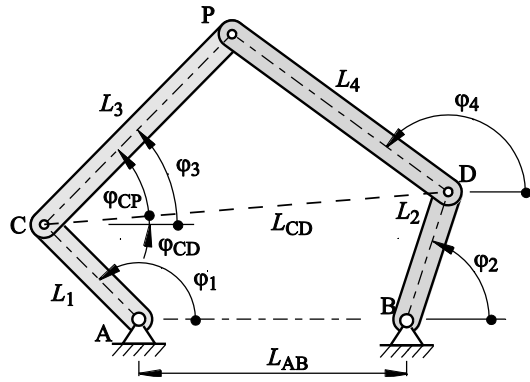
siendo $\varphi_{k,real}$ el valor real del ángulo del actuador k , $\varphi_{k,teórico}$ el valor real de la variable angular del actuador, y $\Delta\varphi$ el error inducido por la señal de control del actuador ($\Delta\varphi = \pm 1^\circ$).

El análisis de sensibilidad se realiza para los manipuladores planos de dos grados de libertad mostrados en la Fig. 7 Configuración de Manipuladores Paralelos Planos de Cinco Eslabones y dos Grados de Libertad. La posición seleccionada fue el punto con coordenadas $x_P = 80$ mm, $y_P = 100$ mm. Como ejemplo de análisis de sensibilidad se considera el manipulador 2-RRR. La posición del punto P depende de las dimensiones del manipulador (L_1, L_2, L_3, L_4 , y L_5), y las coordenadas de los actuadores que accionan a los eslabones 1 y 2 (φ_1, φ_2). La solución para determinar la posición del punto está basada en la Fig. 8. Del análisis geométrico se obtiene:

$x_P = L_1 \cos \varphi_1 + L_3 \cos \varphi_3 = L_{AB} + L_2 \cos \varphi_2 + L_4 \cos \varphi_4$	Ec. 4
--	-------

$y_P = L_1 \sin \varphi_1 + L_3 \sin \varphi_3 = L_2 \sin \varphi_2 + L_4 \sin \varphi_4$	Ec. 5
---	-------

Fig. 8 Cinemática Directa del Manipulador 2-RRR



Conocidos φ_1 y φ_2 se puede determinar la posición de los pares C y D, respectivamente. Del análisis el triángulo CPD de la Fig. 8, se determina la distancia L_{CD} y los ángulos φ_{CD} y φ_{CP} .

$L_{CD} = \sqrt{(L_{AB} + L_2 \cos \varphi_2 - L_1 \cos \varphi_1)^2 + (L_2 \sin \varphi_2 - L_1 \sin \varphi_1)^2}$	Ec. 6
--	-------

$\varphi_{CP} = \arccos \frac{L_{CD}^2 + L_3^2 - L_4^2}{2 L_{CD} L_3}$	Ec. 7
--	-------

$\varphi_{CD} = \arctan \frac{L_2 \sin \varphi_2 - L_1 \sin \varphi_1}{L_{AB} + L_2 \cos \varphi_2 - L_1 \cos \varphi_1}$	Ec. 8
---	-------

El ángulo φ_3 se obtiene mediante

$\varphi_3 = \varphi_{CP} + \varphi_{CD}$	Ec. 9
---	-------

Utilizando la Ec. 4 y la Ec. 5, se obtiene la posición del punto P, con lo que es posible determinar el ángulo φ_4 :

$$\varphi_4 = \text{atan} \frac{y_P - L_2 \sin \varphi_2}{x_P - L_{AB} - L_2 \sin \varphi_2}$$

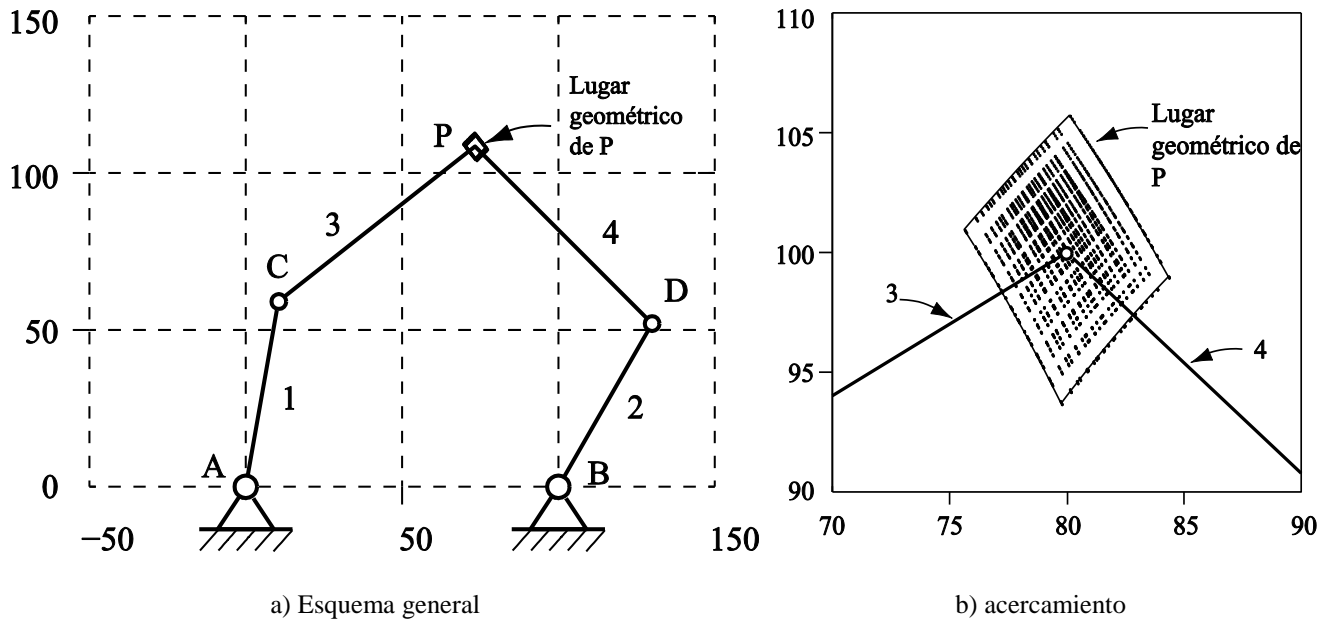
Ec. 10

Para el análisis de sensibilidad se determinan las posibles posiciones del punto P considerando que cada variable es definida por un valor nominal y un error, con lo que se obtiene un rango de valores. Tomando valores discretos en cada rango, se obtienen los posibles puntos de la posición del punto P. En el manipulador 2-RRR se consideran los siguientes valores: $L_{AB} = 100$ mm, $L_1 = L_2 = 60$ mm, $L_3 = L_4 = 80$ mm; los valores de φ_1 y φ_2 se obtienen del análisis de la cinemática inversa del mecanismo: $\varphi_1 = 79,09^\circ$, $\varphi_2 = 49,7^\circ$.

Considerando estos valores como nominales, y teniendo en cuenta el incremento en las dimensiones lineales y angulares, se procede a realizar el barrido de combinaciones de dimensiones para encontrar las posiciones del punto P para cada configuración elegida. En la Fig. 9.a se presenta el lugar geométrico de los puntos de P bajo esta consideración.

En la Fig. 9.b se presenta con mejor detalle las posibles ubicaciones del punto P. En el análisis de sensibilidad se desea cuantificar el área del lugar geométrico del punto P y la distancia entre el punto P deseado y el punto P más alejado que se obtiene cuando se realiza el barrido de las posibles ubicaciones del punto P.

Fig. 9 Error de Posición en el Manipulador 2-RRR, alrededor del Punto $x_P = 80$ mm, $y_P = 100$ mm



En la Tabla 2 se presenta el área del lugar geométrico del punto P, en mm^2 , y la distancia desde el punto P de referencia hasta el punto más alejado, d en mm, de las configuraciones de manipuladores paralelos planos de 2 grados de libertad mostrados en la Fig. 7.

Tabla 2. Valoración de los manipuladores

Manipulador	Área, A_s [mm^2]	Distancia máxima, r_s , [mm]
2- <u>R</u> PR	91,8225	10,0385
2- <u>R</u> PR	43,7437	7,4051
<u>R</u> PR- <u>R</u> PR	60,9848	10,4690
2- <u>R</u> RR	63,7694	6,9037

Tabla 2. Valoración de los manipuladores, continuación

$\underline{R}RR-\underline{R}PR$	76,7719	7,5563
$\underline{R}RR-\underline{R}PR$	93,4341	12,2199
Doble paralelogramo	103,5454	8,8392
$\underline{P}RR-\underline{R}RR$	57,9898	6,0675
$\underline{P}RR-\underline{R}PR$	24,7381	6,9631
$\underline{P}RR-\underline{R}PR$	31,2045	6,5806
$2-\underline{R}RP$	65,3785	7,7790
$2-\underline{R}RP$, version 2	68,3501	6,1557
$\underline{R}RP-\underline{R}PP$	95,3884	16,1201
$\underline{R}RP-\underline{R}PP$, version 2	108,2520	8,5012
$\underline{R}RP-\underline{R}PP$	14,9083	2,7405
$\underline{R}RP-\underline{R}PP$, version 2	39,2850	4,4305

3.1.3 Espacio de trabajo de los manipuladores planos de dos grados de libertad

En el diseño de manipuladores paralelos: espaciales o planos, el área de trabajo que puede cubrir un mecanismo es un aspecto muy importante, ya que en gran medida depende de las dimensiones de los eslabones móviles y de la orientación de la plataforma móvil. En los manipuladores seriales el espacio de trabajo es mayor que el de un manipulador paralelo [1]. El espacio de trabajo se define como la máxima región de puntos que puede alcanzar la plataforma móvil o elemento terminal. El espacio de trabajo de cada configuración requiere un análisis diferente. Como ejemplo del procedimiento para determinar el espacio de trabajo de un manipulador, se presentará el caso del manipulador $2-\underline{R}RR$. Las otras configuraciones requieren de análisis similares; estos no se presentan por limitaciones de espacio. El espacio de trabajo se obtiene trazando las circunferencias con centros en los apoyos fijos y con radio igual a la suma y al valor absoluto de la resta de las longitudes de los eslabones. En la Fig. 10.d se muestra el espacio de trabajo de este manipulador.

Fig. 10 Espacio de trabajo de algunos de los manipuladores de dos grados de libertad

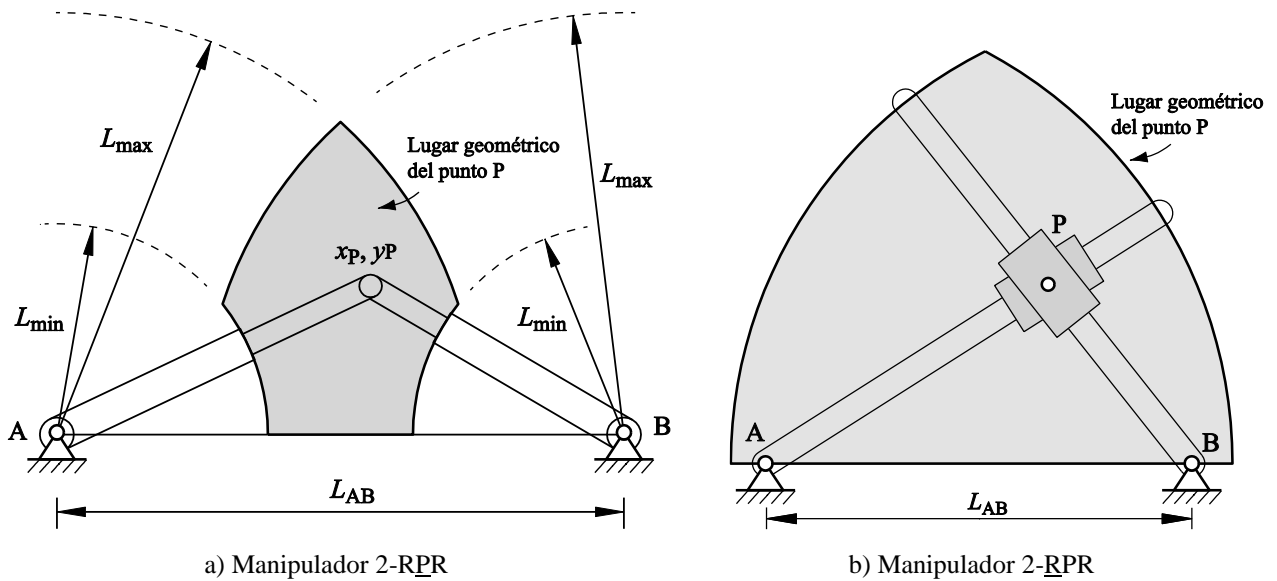
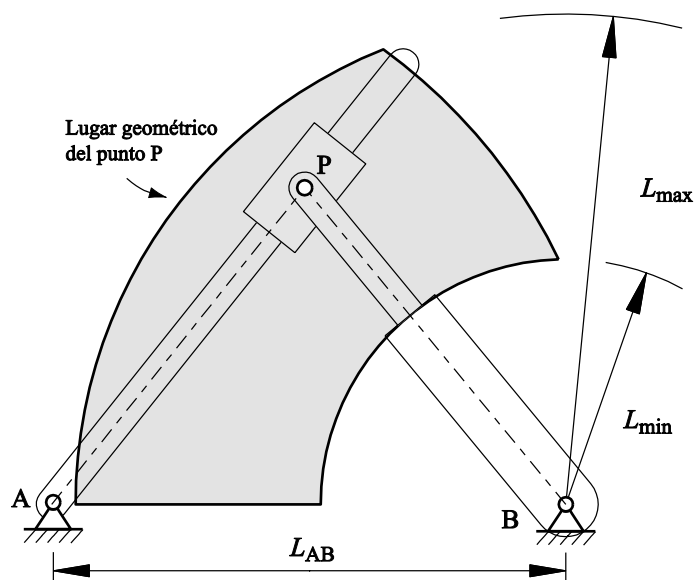
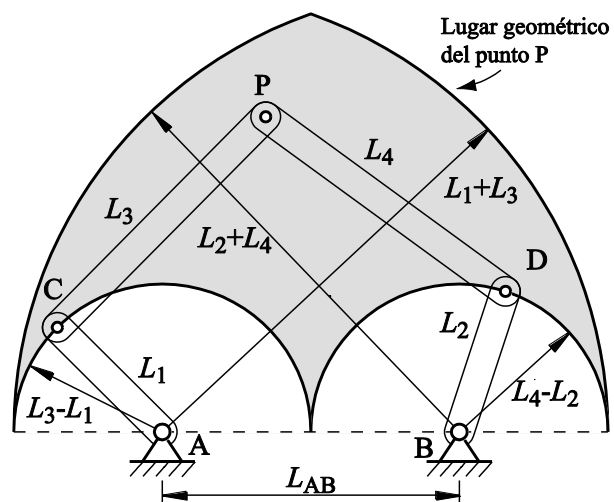


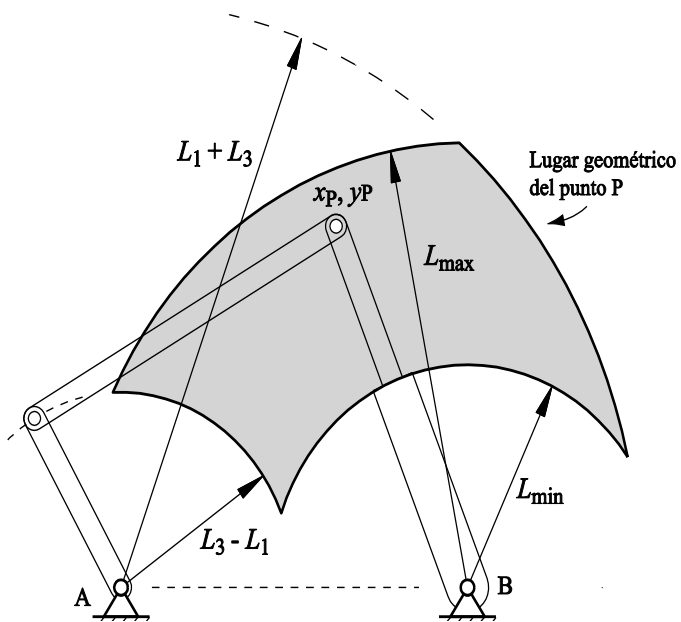
Fig. 10 Espacio de trabajo de algunos de los manipuladores de dos grados de libertad, continuación



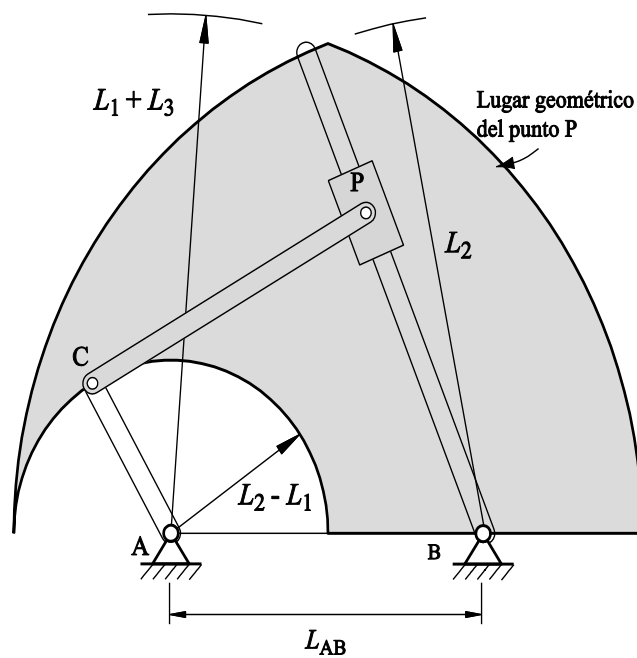
c) Manipulador 2-RPR RPR



d) Manipulador 2-RRR

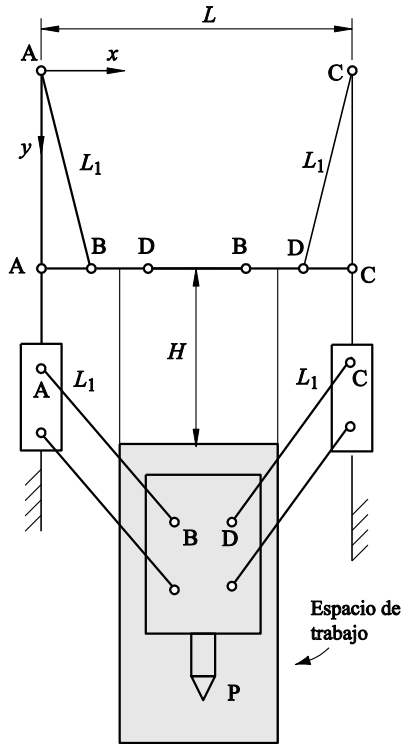


e) Manipulador RRR RPR

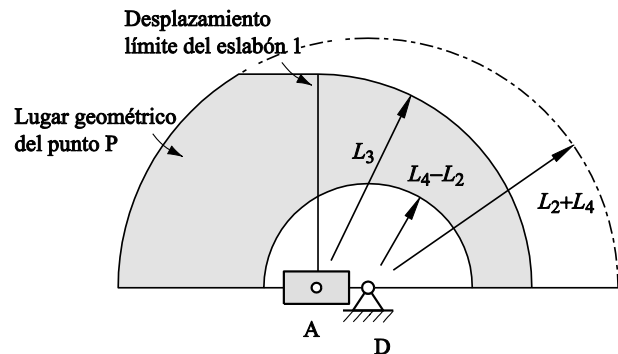


f) Manipulador RRR RPR

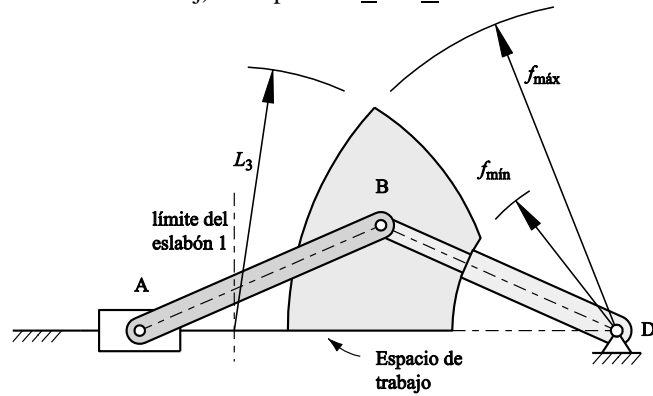
Fig. 10 Espacio de trabajo de algunos de los manipuladores de dos grados de libertad, continuación



i) Manipulador doble paralelogramo



j) Manipulador PRR-RRR



g) Manipulador PRR-RPR

En la Tabla 3 se presenta el área del espacio de trabajo de las configuraciones de manipuladores paralelos planos de 2 grados de libertad mostrados en la Fig. 10; el área está expresada en mm^2 . El espacio de trabajo del manipulador 2-RPR con actuadores rotativos, está limitado por la longitud de los eslabones que tienen la entrada de movimiento. Este espacio se encuentra trazando las circunferencias con radio igual a la longitud de los eslabones y con centro en el apoyo respectivo.

Tabla 3. Espacio de trabajo de los manipuladores

Manipulador	Área, A_{et} , [mm^2]
2- <u>RPR</u>	3413,3615
2- <u>RPR</u>	10229,0990
<u>RPR</u> - <u>RPR</u>	5724,0023
2- <u>RRR</u>	7744,7600
<u>RRR</u> - <u>RPR</u>	4014,6423
<u>RRR</u> - <u>RPR</u>	9400,8457
Doble paralelogramo	4000
<u>PRR</u> - <u>RRR</u>	25103,3133
<u>PRR</u> - <u>RPR</u>	4852,5834
<u>PRR</u> - <u>RPR</u>	25599,6633
2- <u>RRP</u>	13699,8926
2- <u>RRP</u> , versión 2	1301,8299
<u>RRP</u> - <u>RPP</u>	8024,5424
<u>RRP</u> - <u>RPP</u> , versión 2	6585,5572

<u>RRP-RPP</u>	3392,0187
<u>RRP-RPP</u> , versión 2	2939,5678

3.1.4 Valoración de las configuraciones

La síntesis de tipo se realizará teniendo en cuenta tres criterios: (i) análisis de sensibilidad, (ii) espacio de trabajo, y (iii) factibilidad de fabricación. Estos criterios se valoran con una valoración entre 1 a 5, y cada criterio es ponderado de tal forma que la suma de las ponderaciones sea igual a la unidad. Teniendo en cuenta que los manipuladores requieren tener buena precisión, es deseable que los manipuladores sean pocos sensibles a los errores considerados; este criterio tendrá una ponderación de 0,35. El espacio de trabajo es importante ya que permite aumentar la utilidad del manipulador; este criterio tendrá una ponderación de 0,35. La factibilidad de fabricación es importante para evitar problemas de ensamble del manipulador; este criterio tendrá una ponderación del 0,30. En la calificación para la sensibilidad, ver Tabla 4, los manipuladores que tienen menor área, A_s , y menor distancia máxima, R_s , obtienen un valor cercano a 5,0; por otra parte, los que tienen mayores valores obtienen un valor cercano a 1,0. La evaluación está dada por:

$SENS = 5 - 2 \frac{A_s - A_{s,\min}}{A_{s,\max} - A_{s,\min}} - 2 \frac{R_s - R_{s,\min}}{R_{s,\max} - R_{s,\min}}$	Ec. 11
--	--------

En la Tabla 4 el primer valor corresponde a la evaluación obtenida; el valor entre paréntesis corresponde al valor obtenido al multiplicar por el peso del criterio. Para la calificación del espacio de trabajo, el manipulador de mayor área obtiene el valor de 5,0, y el de menor área obtiene una calificación de 1,0.

La evaluación está dada por:

$ESPACIO = 1 + 4 \frac{A_{et} - A_{et,\min}}{A_{et,\max} - A_{et,\min}}$	Ec. 12
--	--------

La evaluación para la fabricación fue dada acorde con la dificultad en el proceso constructivo de los eslabones y se realiza una valoración por el grupo de trabajo. Acorde con los valores obtenidos, los cuatro manipuladores con mayor calificación fueron: i) PRR-RRR, ii) PRR-RPR, iii) 2-RRR, y iv) 2-RPR. El grupo de trabajo hasta el momento ha realizado estudios con los manipuladores 2-RRR, y el 2-RPR, obteniendo buenos resultados para el control de la trayectoria.

Tabla 4. Valoración de las configuraciones de los manipuladores paralelos planos de dos GDL

Manipulador		Sensibilidad	Espacio	Fabricación	TOTAL
1	<u>2-RPR</u>	2,26 (0,79)	1,35 (0,47)	4 (1,2)	2,5
2	<u>2-RPR</u>	3,68 (1,29)	2,47 (0,68)	4 (1,2)	3,4
3	<u>RPR-RPR</u>	2,86 (1,0)	1,73 (0,61)	4 (1,2)	2,8
4	<u>2-RRR</u>	3,33 (1,17)	2,06 (0,71)	5 (1,5)	3,4
5	<u>RRR-RPR</u>	2,95 (1,03)	1,45 (0,51)	4 (1,2)	2,7
6	<u>RRR-RPR</u>	1,90 (0,67)	2,33 (0,82)	4 (1,2)	2,7
7	Doble paralelogramo	2,19 (0,77)	1,44 (0,51)	4 (1,2)	2,5
8	<u>PRR-RRR</u>	3,58 (1,25)	4,92 (1,72)	3 (0,9)	3,9
9	<u>PRR-RPR</u>	4,16 (1,16)	1,58 (0,56)	3 (0,9)	2,9
10	<u>PRR-RPR</u>	4,01 (1,43)	5,0 (1,75)	2 (0,6)	3,8
11	<u>2-RRP</u>	3,17 (1,11)	3,04 (1,06)	2 (0,6)	2,8
12	<u>2-RRP</u> , versión 2	3,34 (1,17)	1,0 (0,35)	2 (0,6)	2,1
13	<u>RRP-RPP</u>	1,28 (0,45)	2,11 (0,74)	1 (0,3)	1,5
14	<u>RRP-RPP</u> , versión 2	2,14 (0,75)	1,87 (0,65)	1 (0,3)	1,7
15	<u>RRP-RPP</u>	5,0 (1,75)	1,34 (0,47)	1 (0,3)	2,5
16	<u>RRP-RPP</u> , versión 2	4,23 (1,48)	1,27 (0,44)	1 (0,3)	2,5

3.2 MANIPULADORES PLANOS DE TRES GRADOS DE LIBERTAD

En un manipulador paralelo plano de tres grados de libertad se tiene control de la posición del elemento terminal (x_P , y_P), y de la pose, φ_7 . Este tipo de manipuladores se utiliza en tareas en que el elemento terminal se mueve en el plano, y se debe controlar su posición angular. Se obtienen diferentes configuraciones de manipuladores con siete eslabones y tres grados de libertad considerando el tipo de actuador, lineal o rotativo, y el tipo de par cinemático entre los eslabones, de rotación o prismáticos.

3.2.1 Configuraciones estudiadas

En la Fig. 11 se muestran las configuraciones de manipuladores de tres grados de libertad analizados en este trabajo. Se analizan seis combinaciones posibles de manipuladores de tres grados de libertad, las combinaciones se obtienen si se utilizan pares cinemáticos activos de rotación, R, o prismáticos, P, o pares cinemáticos pasivos de rotación, R, o prismáticos, P. Con estas combinaciones se obtienen tres diadas idénticas en el manipulador. A diferencia del estudio de los manipuladores de dos grados de libertad, no se combinan las diadas, ya que el número de combinaciones es alto.

Fig. 11 Configuraciones de manipuladores de tres grados de libertad analizados

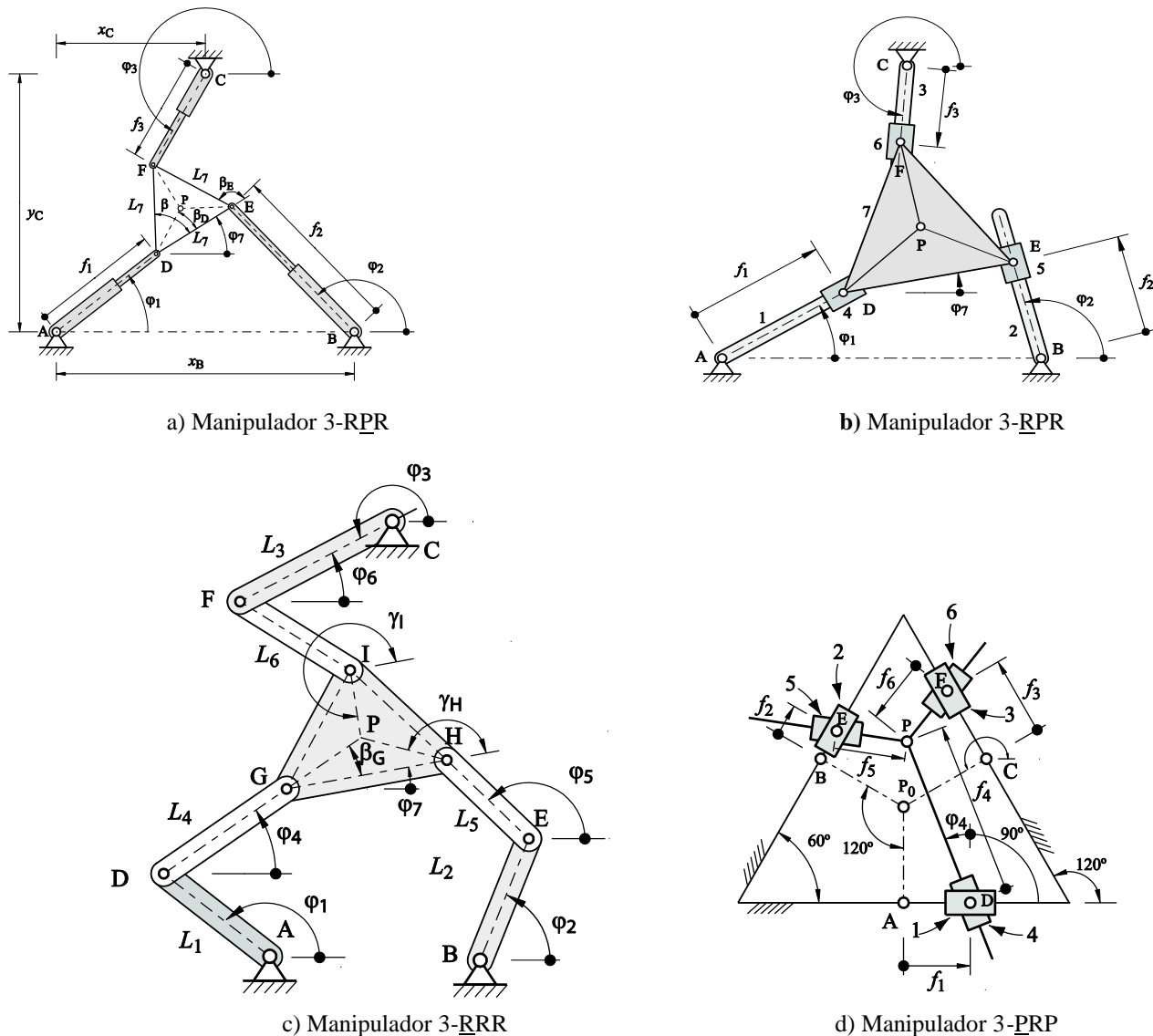
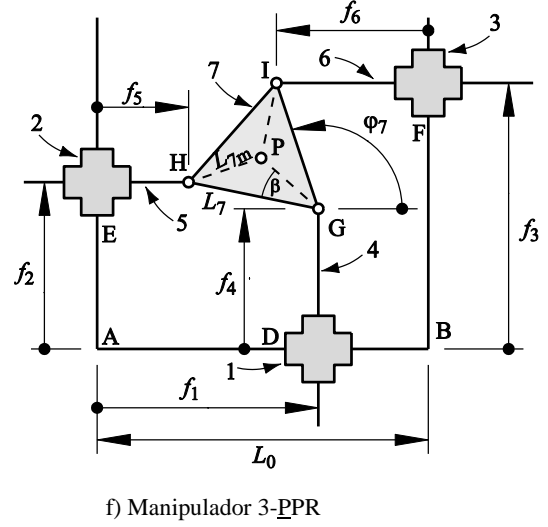
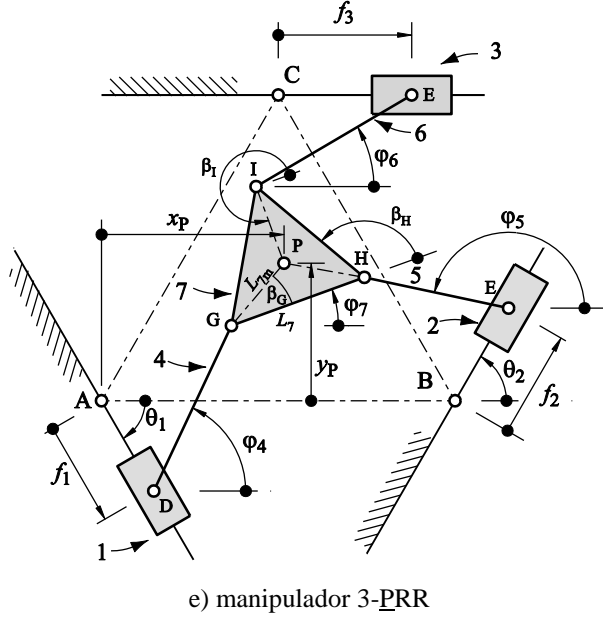


Fig. 11 Configuraciones de manipuladores de tres grados de libertad analizados, continuación



3.2.2 Análisis de sensibilidad

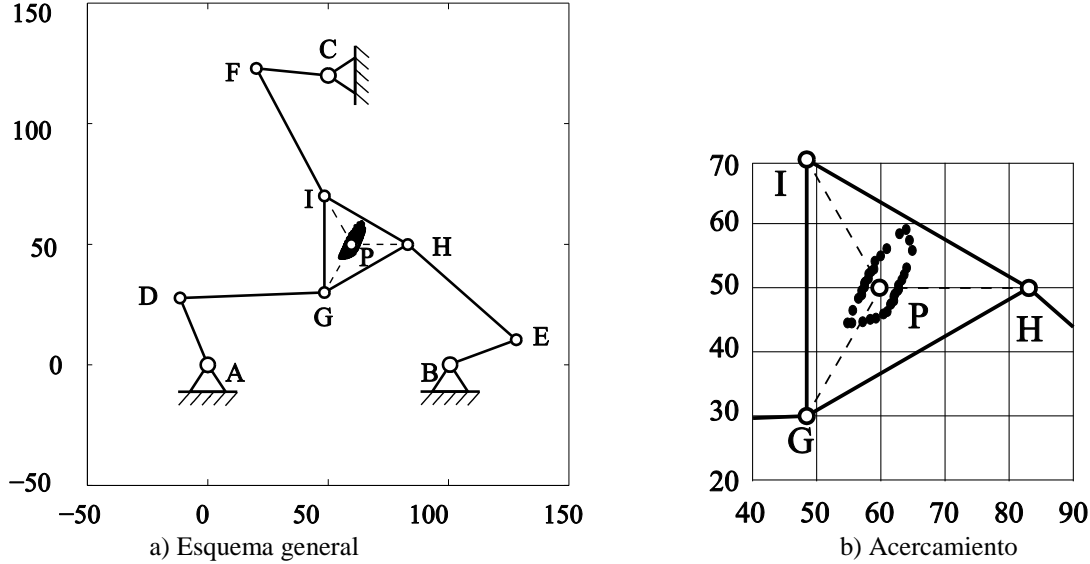
El análisis de sensibilidad de los manipuladores de tres grados de libertad se realiza, similar al caso de los manipuladores planos de dos grados de libertad, considerando el error debido a los parámetros geométricos y el debido a la señal de control de los actuadores. A diferencia del caso analizado con los manipuladores de dos grados de libertad, en los de tres grados de libertad se tiene en cuenta la posición del elemento terminal (x_P , y_P), y la diferencia en la pose del elemento terminal, φ_7 . Los errores debido a los parámetros geométricos, y los errores debido a la señal de los actuadores, se definen similar a los definidos para el manipulador paralelo plano de dos grados de libertad; estos están definidos, respectivamente, por Ec. 1, Ec. 2, y Ec. 3.

El análisis de sensibilidad se realiza para los manipuladores planos de tres grados de libertad mostrados en la Fig. 11. La posición seleccionada fue el punto con coordenadas $x_P = 40$ mm, $y_P = 60$ mm y $\theta_7 = 30^\circ$. Para el análisis de sensibilidad se determinan las posibles posiciones del punto P considerando que cada variable es definida por un valor nominal y un error con lo que se obtiene un rango de valores. Tomando valores discretos en cada rango, se obtienen los posibles puntos de la posición del punto P. De manera similar se determina el error en la pose del elemento terminal.

Considerando estos valores como nominales, y teniendo en cuenta el incremento en las dimensiones lineales y angulares, se procede a realizar el barrido de combinaciones de dimensiones y valores de la señal de los actuadores, para encontrar las posiciones del punto P y la pose del elemento terminal para cada configuración elegida. En la Fig. 12.a se presenta el lugar geométrico de los puntos de P bajo esta consideración para el manipulador .

En la Fig. 12.b se presenta con mejor detalle las posibles ubicaciones del punto P. En el análisis de sensibilidad se desea cuantificar el área del lugar geométrico del punto P y la distancia entre el punto P deseado y el punto P más alejado que se obtiene cuando se realiza el barrido de las posibles ubicaciones del punto P.

Fig. 12 Lugar geométrico del punto P en el manipulador 3-RRR alrededor de $x_P = 60$ mm, $y_P = 50$ mm y $\theta_7 = 30^\circ$



En la Tabla 5 se presentan los resultados del análisis de sensibilidad de los manipuladores de tres grados de libertad analizados. Se presenta el área del lugar geométrico de las posibles posiciones del punto P, la distancia del punto P deseado hasta el punto más alejado, y la desviación en la pose del elemento terminal.

Tabla 5. Análisis de sensibilidad de los manipuladores de tres grados de libertad, $x_P = 60$, $y_P = 50$, $\theta_7 = 30^\circ$

Manipulador	Área [mm ²]	d [mm]	θ [°]
3- <u>R</u> PR	27,3919	4,6344	25,4457
3- <u>R</u> PR	12,6033	3,8236	7,5282
3- <u>R</u> RR	64,6958	9,8382	19,8602
3- <u>P</u> RP	30,6607	4,0345	2,9728
3- <u>P</u> RR	42,0853	9,8841	12,4552
3- <u>P</u> PR	31,8365	5,4292	18,9680

Las dimensiones de los diferentes manipuladores son: i) 3-RPR: $x_B = 100$ mm, $x_C = 50$ mm, $y_C = 120$ mm, $L_7 = 40$ mm, ii) 3-RPR: $x_B = 100$ mm, $x_C = 50$ mm, $y_C = 100$ mm, $L_7 = 40$ mm, iii) 3-RRR: $x_B = 100$ mm, $x_C = 50$ mm, $y_C = 120$ mm, $L_7 = 40$ mm, $L_1 = L_2 = L_3 = 40$ mm, $L_4 = L_5 = L_6 = 60$ mm, iv) 3-PRP: $x_B = 100$ mm, v) 3-PRR: $x_B = 100$ mm, $x_C = 50$ mm, $y_C = 86.6$ mm, $\theta_1 = \theta_2 = 60^\circ$, $L_4 = L_5 = L_6 = 60$ mm, vi) 3-PPR: $x_B = 100$ mm.

3.2.3 Espacio de trabajo de los manipuladores paralelos planos de tres grados de libertad

El espacio de trabajo de los manipuladores de tres grados de libertad, se obtienen de manera similar al caso de los manipuladores de dos grados de libertad. En la Fig. 13 se muestra el procedimiento para obtener el espacio de trabajo de los manipuladores considerados en este estudio.

Fig. 13 Espacio de trabajo de los manipuladores paralelos planos de tres GDL

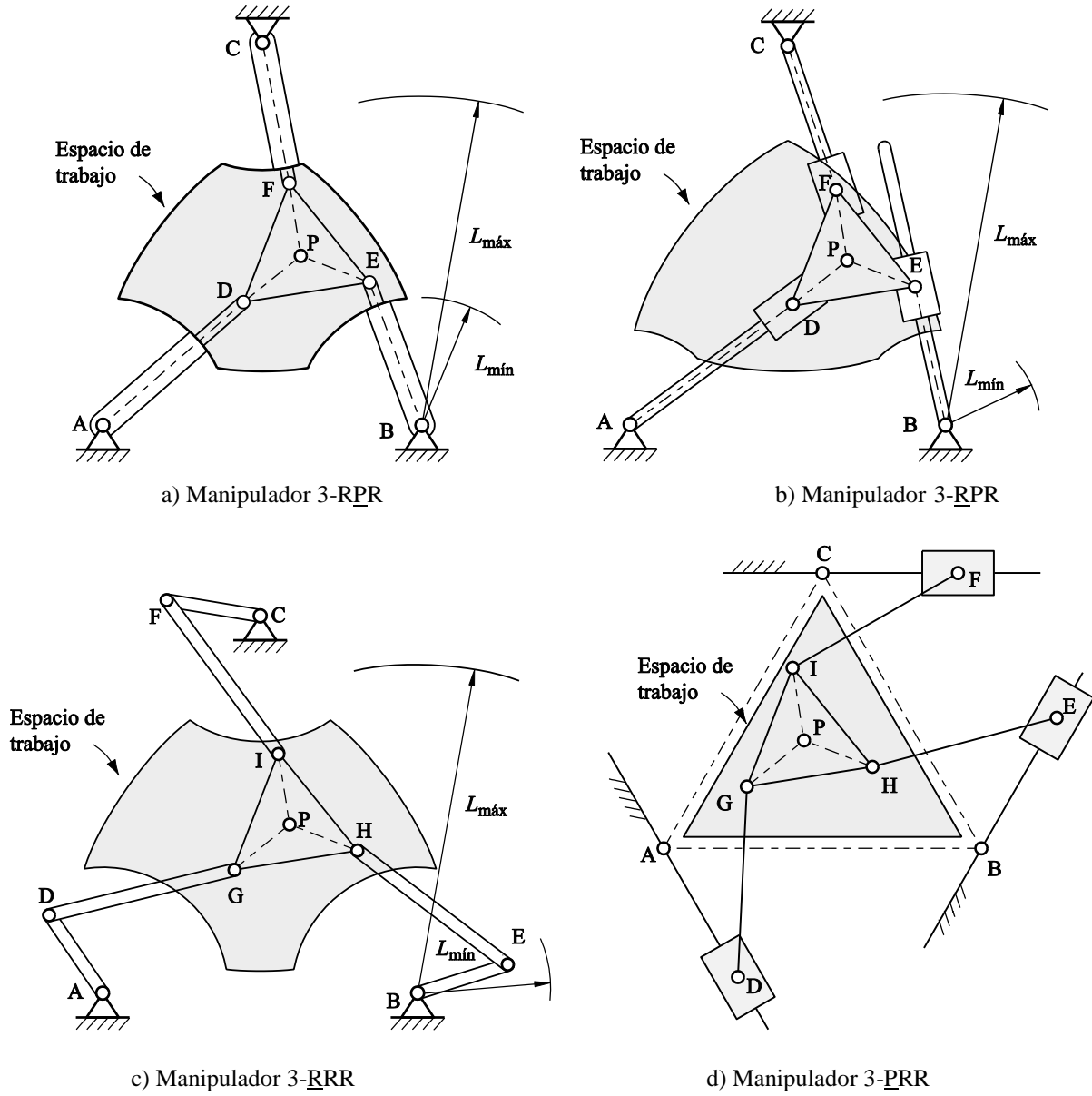
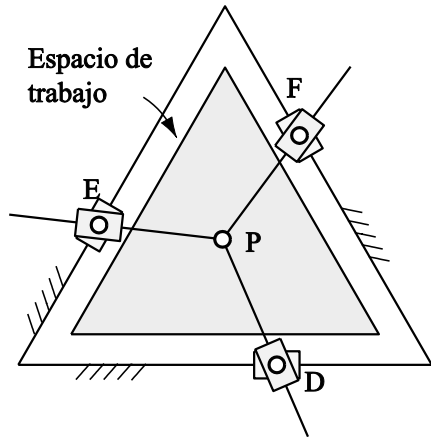
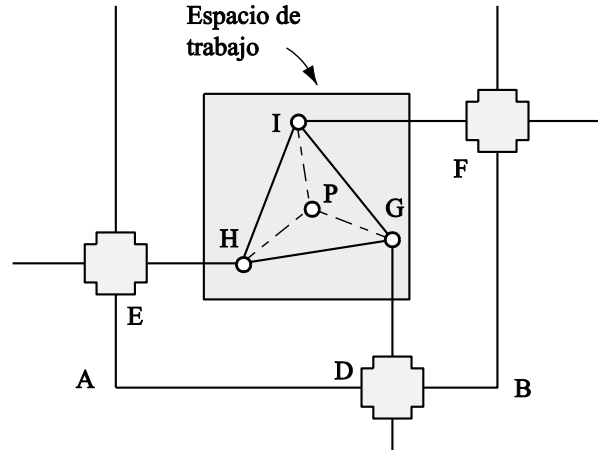


Fig. 13 Espacio de trabajo de los manipuladores paralelos planos de tres GDL, continuación



e) Manipulador 3-PRP



f) Manipulador 3-PPR

En la Tabla 6 se presenta el área del espacio de trabajo, en mm², utilizando los procedimientos mostrados en la Fig. 13.

Tabla 6. Espacio de trabajo de los manipuladores paralelos planos de tres GDL

Manipulador	Área del espacio de trabajo [mm ²]
3-R <u>P</u> PR	3726,38
3-R- <u>P</u> PR	4479,50
3-R-RRR	5073,31
3- <u>P</u> PRP	2397,62
3- <u>P</u> RRR	3316,80
3-PPR	2901,44

3.2.4 Valoración de las configuraciones

La síntesis de tipo se realizará teniendo en cuenta los mismos criterios utilizados para los manipuladores de dos grados de libertad: (i) análisis de sensibilidad, (ii) espacio de trabajo, y (iii) factibilidad de fabricación. Los criterios también tendrán igual valor ponderado: análisis de sensibilidad 0,35, espacio de trabajo 0,35, y factibilidad de fabricación 0,30.

La calificación para la sensibilidad tendrá en cuenta el área del lugar geométrico del punto P, la máxima distancia, y el error en la pose. La valoración de este criterio está dado por la Ec. 13:

$SENS = 5 - \frac{A_s - A_{s,\min}}{A_{s,\max} - A_{s,\min}} - \frac{R_s - R_{s,\min}}{R_{s,\max} - R_{s,\min}} - 2 \frac{\theta_s - \theta_{s,\min}}{\theta_{s,\max} - \theta_{s,\min}}$	Ec. 13
---	--------

La valoración del espacio de trabajo será la utilizada para la valoración de los manipuladores paralelos planos de dos grados de libertad formulada mediante la Ec. 12. En la

Tabla 77 se presenta la valoración de los manipuladores paralelos planos de tres grados de libertad considerando los tres criterios definidos.

Tabla 7. Valoración de las configuraciones de los manipuladores paralelos planos de tres GDL

Manipulador	Sensibilidad	Espacio de trabajo	Fabricación	Total
3-R <u>P</u> PR	1,92 (0,67)	2,99 (1,05)	3,0 (0,9)	2,62
3- <u>R</u> PR	4,46 (1,56)	4,11 (1,44)	3,0 (0,9)	3,90
3- <u>R</u> RR	1,01 (0,35)	5,0 (1,75)	5,0 (1,5)	3,60
3- <u>P</u> RP	4,62 (1,62)	1,0 (0,35)	1,0 (0,3)	2,27
3- <u>P</u> RR	2,31 (0,81)	2,37 (0,83)	3,0 (0,9)	2,54
3- <u>P</u> PR	2,47 (0,87)	1,75 (0,61)	1,0 (0,3)	1,78

Acorde con los resultados obtenidos, se obtienen que los tres manipuladores con mejor valoración son: i) 3-RPPR, ii) 3-RRR, y iii) 3-RPR.

CAPÍTULO CUATRO

4. ANÁLISIS CINEMÁTICO

En manipuladores paralelos, la cinemática inversa consiste en encontrar las variables de las juntas activas y pasivas en función de las coordenadas del efector final del robot y puede ser utilizada para controlarla posición del efector final. El modelo cinemático de este tipo de robots tiene ecuaciones algebraicas con múltiples soluciones [1].

En la cinemática directa de robots paralelos el problema es determinar la posición del elemento final en función de las juntas activas. En general, la solución a este problema no es única, de ahí que la cinemática ha sido objeto de una intensa investigación, por ejemplo, el trabajo reportado por Merlet [1]. Raghavan [9] muestra la solución de la cinemática directa de un manipulador paralelo resolviendo en función de un polinomio; [1], [10] y [11] mostraron, de igual manera, que el problema de la cinemática directa es reducir las ecuaciones de posición a un polinomio en función de las variables activas. Sin embargo, la solución del polinomio no asegura la correcta evolución de las variables de las juntas activas y no considera a las juntas pasivas, al ejecutar una tarea dada. Por otro lado, no hay algoritmo conocido que permita la fácil determinación de una postura única para la plataforma móvil [1].

Es importante hacer hincapié en el problema del resultado de la cinemática directa por polinomio. El cálculo puede implicar un gran número de operaciones y por lo tanto puede ser muy sensible a errores numéricos de redondeo; por esta razón la comprobación de la validez de las soluciones con la cinemática inversa es normalmente necesaria [11].

La solución de la cinemática directa e inversa, utilizando la integración de la cinemática diferencial, es particularmente importante para los manipuladores de cadenas cinemáticas cerradas cuyas soluciones no existen, son difíciles de obtener, o son demasiado complejas para ser tratadas; el trabajo de Campos [12] sobre robots paralelos, constituye un buen ejemplo de esto.

Este capítulo se centra en el estudio cinemático ya mencionado de 4 arquitecturas de dos grados de libertad y de 3 arquitecturas de tres grados de libertad que han sido seleccionadas por poseer un mejor funcionamiento que las demás ya mencionadas en el capítulo anterior, a dichas arquitecturas se le realizaron sus respectivos análisis de cinemática directa, inversa, velocidades y aceleraciones.

4.1 MANIPULADORES DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

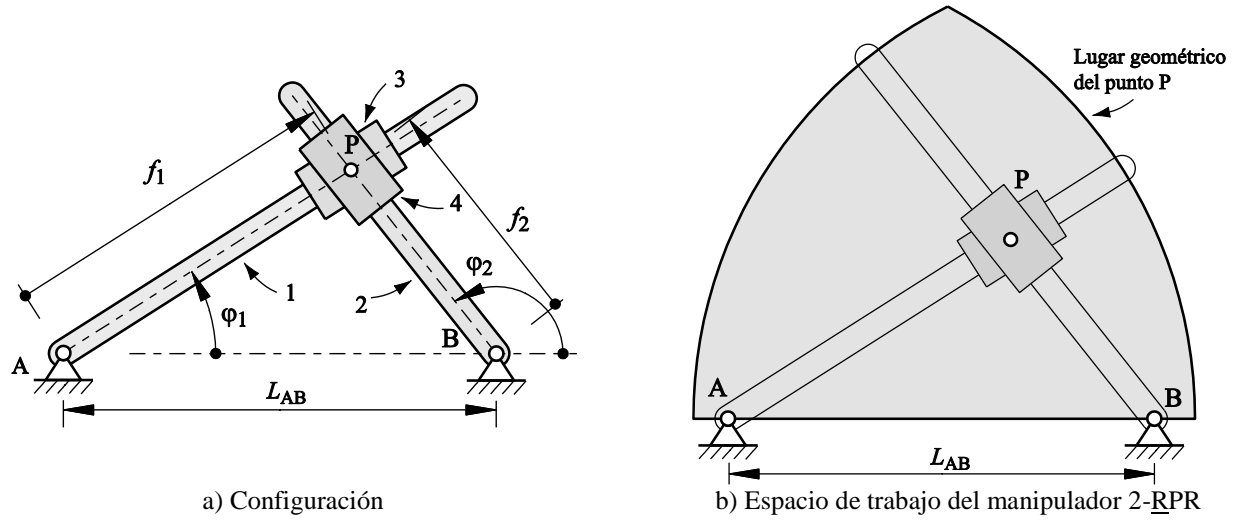
4.1.1 Manipulador 2-RPR

1- Configuración general

En la Fig. 14.a se presenta un manipulador 2-RPR accionado por actuadores rotativos con apoyos en A y en B. Este manipulador es analizado en [13]. Las coordenadas de entrada son $[\varphi_1, \varphi_2]^T$. El conjunto de coordenadas generalizadas del manipulador está dado por $[\varphi_1, \varphi_2, f_1, f_2, x_P, y_P]^T$.

El espacio de trabajo del manipulador 2-RPR con actuadores rotativos, mostrado en Fig. 14.b, está limitado por la longitud de los eslabones que tienen la entrada de movimiento. Este espacio se encuentra trazando las circunferencias con radio igual a la longitud de los eslabones y con centro en el apoyo respectivo.

Fig. 14 Manipulador 2-RPR: actuadores rotativos



2- Cinemática directa

El vector de coordenadas del manipulador está dado por $[q] = [\varphi_1, \varphi_2, f_1, f_2, x_P, y_P]^T$. En la cinemática directa se conocen las longitudes de los actuadores lineales $[\varphi_1, \varphi_2]^T$ y se requiere determinar el conjunto de coordenadas dadas por $[f_1, f_2, x_P, y_P]^T$. Las ecuaciones se obtienen del análisis geométrico:

$$x_P = f_1 \cos \varphi_1 = L_{AB} + f_2 \cos \varphi_2$$

Ec. 14

$$y_P = f_1 \sin \varphi_1 = f_2 \sin \varphi_2$$

Ec. 15

Dividiendo la Ec. 15 por la Ec. 14, y organizando términos se obtiene:

$$\tan \varphi_1 (L_{AB} + f_2 \cos \varphi_2) = f_2 \sin \varphi_2$$

Ec. 16

Organizando términos se obtiene:

$$f_2 = \frac{L_{AB} \tan \varphi_1}{\sin \varphi_2 - \tan \varphi_1 \cos \varphi_2}$$

Ec. 17

Reescribiendo la Ec. 14, y utilizando como divisor de la Ec. 15, se obtiene:

$$\tan \varphi_2 = \frac{f_1 \sin \varphi_1}{f_1 \cos \varphi_1 - L_{AB}}$$

Ec. 18

Organizando términos se obtiene:

$$f_1 = \frac{L_{AB} \tan \varphi_2}{\tan \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1}$$

Ec. 19

De la división entre la Ec. 15 y la Ec. 14, se obtiene:

$$y_P = x_P \tan \varphi_1$$

Ec. 20

$$y_P = (x_P - L_{AB}) \tan \varphi_2$$

Ec. 21

Con lo que se obtiene:

$x_P = \frac{L_{AB} \tan \varphi_2}{\tan \varphi_2 - \tan \varphi_1}$	Ec. 22	$y_P = \frac{L_{AB} \tan \varphi_2 \tan \varphi_1}{\tan \varphi_2 - \tan \varphi_1}$	Ec. 23
---	--------	--	--------

3- Cinemática inversa

En la cinemática inversa se requiere determinar el conjunto de coordenadas $[f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2]^T$ a partir de las coordenadas del punto P, punto del elemento terminal. Utilizando la Ec. 14 y la Ec. 15, se obtiene:

$f_1 = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$	Ec. 24	$\varphi_1 = \text{atan} \frac{y_P}{x_P}$	Ec. 25
------------------------------	--------	---	--------

Utilizando la Ec. 14 y la Ec. 15 se obtiene:

$f_2 = \sqrt{(x_P - L_{AB})^2 + y_P^2}$	Ec. 26	$\varphi_2 = \text{atan} \frac{y_P}{x_P - L_{AB}}$	Ec. 27
---	--------	--	--------

4- Análisis de velocidades

El análisis de velocidades directo requiere conocer la velocidad del elemento terminal, $[\dot{x}_P, \dot{y}_P]$, a partir de la velocidad de la coordenada de entrada de los eslabones conductores, $[\dot{f}_1, \dot{f}_2]$. Derivando con respecto al tiempo las ecuaciones de enlace, se obtiene:

$\dot{f}_1 \cos \varphi_1 - f_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - \dot{f}_2 \cos \varphi_2 + f_2 \sin \varphi_2 \omega_2 = 0$	Ec. 28
---	--------

$\dot{f}_1 \sin \varphi_1 + f_1 \cos \varphi_1 \omega_1 - \dot{f}_2 \sin \varphi_2 - f_2 \cos \varphi_2 \omega_2 = 0$	Ec. 29
---	--------

$\dot{f}_1 \cos \varphi_1 - f_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - \dot{x}_P = 0$	Ec. 30	$\dot{f}_1 \sin \varphi_1 + f_1 \cos \varphi_1 \omega_1 - \dot{y}_P = 0$	Ec. 31
--	--------	--	--------

Este conjunto de ecuaciones puede ser expresado mediante:

$\begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 & -\sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f_1 \sin \varphi_1 & f_2 \sin \varphi_2 & 0 & 0 \\ f_1 \cos \varphi_1 & -f_2 \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ -f_1 \sin \varphi_1 & 0 & -1 & 0 \\ f_1 \cos \varphi_1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	Ec. 32
---	--------

En forma simplificada:

$[J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i] + [J_{q,d}] \cdot [\dot{q}_d] = 0$	Ec. 33
---	--------

Siendo $J_{q,i}$ y $J_{q,d}$, respectivamente, la matriz jacobiana asociada al vector de coordenadas generalizadas independientes y dependientes. Estas matrices están dadas por:

$[J_{q,i}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 & -\sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & 0 \end{bmatrix}$	Ec. 34	$[J_{q,d}] = \begin{bmatrix} -f_1 \sin \varphi_1 & f_2 \sin \varphi_2 & 0 & 0 \\ f_1 \cos \varphi_1 & -f_2 \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ -f_1 \sin \varphi_1 & 0 & -1 & 0 \\ f_1 \cos \varphi_1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	Ec. 35
--	--------	---	--------

De la Ec. 33 se obtiene:

$[\dot{q}_d] = -\text{inv}([J_{q,d}]) \cdot ([J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i])$	Ec. 36
--	--------

En el análisis de velocidades inverso, se tienen conocidas la velocidad del punto P, $[\dot{x}_p, \dot{y}_p]$, punto del elemento terminal; se requiere determinar las velocidades asociadas a las otras coordenadas generalizadas, $[\dot{f}_1, \omega_1, \dot{f}_2, \omega_2]$.

Reescribiendo las Ec. 14 y Ec. 15, derivando con respecto al tiempo, se obtiene:

$\dot{x}_p - \dot{f}_1 \cos \varphi_1 + \dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1 = 0$	Ec. 37	$\dot{y}_p - \dot{f}_1 \sin \varphi_1 - \dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1 = 0$	Ec. 38
--	--------	--	--------

$\dot{x}_p - \dot{f}_2 \cos \varphi_2 + \dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2 = 0$	Ec. 39	$\dot{y}_p - \dot{f}_2 \sin \varphi_2 - \dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 = 0$	Ec. 40
--	--------	--	--------

Este sistema de ecuaciones se puede representar mediante:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos \varphi_1 & \dot{f}_1 \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & -\dot{f}_1 \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \varphi_2 & \dot{f}_2 \sin \varphi_2 \\ 0 & 0 & -\sin \varphi_2 & -\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \omega_1 \\ \dot{f}_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	Ec. 41
--	--------

En forma simplificada:

$[\mathbf{A}] \cdot [\dot{x}_p \quad \dot{y}_p]^T + [\mathbf{B}] \cdot [\dot{f}_1 \quad \omega_1 \quad \dot{f}_2 \quad \omega_2]^T = \mathbf{0}$	Ec. 42
--	--------

Con lo que se obtiene:

$[\dot{f}_1 \quad \omega_1 \quad \dot{f}_2 \quad \omega_2]^T = -\text{inv}([\mathbf{B}]) \cdot ([\mathbf{A}] \cdot [\dot{x}_p \quad \dot{y}_p]^T) = \mathbf{0}$	Ec. 43
---	--------

5- Análisis de aceleraciones

Para el análisis de aceleraciones, se procede a obtener la segunda derivada con respecto al tiempo de las ecuaciones de enlace, con lo que se obtiene:

$\ddot{f}_1 \cos \varphi_1 - \dot{f}_1 \sin \varphi_1 \alpha_1 - 2\dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - \dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 - \ddot{f}_2 \cos \varphi_2 + \dot{f}_2 \sin \varphi_2 \alpha_2 + 2\dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + \dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 = 0$	Ec. 44
---	--------

$\ddot{f}_1 \sin \varphi_1 + \dot{f}_1 \cos \varphi_1 \alpha_1 + 2\dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1 - \dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 - \ddot{f}_2 \sin \varphi_2 - \dot{f}_2 \cos \varphi_2 \alpha_2 - 2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 + \dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 = 0$	Ec. 45
---	--------

$\ddot{f}_1 \cos \varphi_1 - \dot{f}_1 \sin \varphi_1 \alpha_1 - 2\dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - \dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 - \ddot{x}_p = 0$	Ec. 46
---	--------

$\ddot{f}_1 \sin \varphi_1 + \dot{f}_1 \cos \varphi_1 \alpha_1 + 2\dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1 - \dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 - \ddot{y}_p = 0$	Ec. 47
---	--------

Este conjunto de ecuaciones puede ser representado por:

$[\mathbf{J}_{q,i}] \cdot [\ddot{\mathbf{q}}_i] + [\mathbf{J}_{q,d}] \cdot [\ddot{\mathbf{q}}_d] + [\mathbf{J}_q] \cdot [\ddot{\mathbf{q}}] = \mathbf{0}$	Ec. 48
---	--------

Donde:

$[\mathbf{J}_q] \cdot [\ddot{\mathbf{q}}] = \begin{bmatrix} -2\dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - \dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 + 2\dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + \dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 \\ 2\dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1 - \dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 - 2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 + \dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 \\ -2\dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - \dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 \\ 2\dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1 - \dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 \end{bmatrix}$	Ec. 49
---	--------

En el análisis de aceleraciones inverso, se tienen conocidas la aceleración del punto P (\ddot{x}_P, \ddot{y}_P), punto del elemento terminal; se requiere determinar las aceleraciones, $[\ddot{f}_1, \alpha_1, \ddot{f}_2, \alpha_2]$, asociadas a las otras coordenadas generalizadas.

Derivando con respecto al tiempo las Ec. 37, Ec. 38, Ec. 39 y Ec. 40 se obtiene:

$\ddot{x}_P - \ddot{f}_1 \cos \varphi_1 + f_1 \sin \varphi_1 \alpha_1 + 2\dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1 + f_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 = 0$	Ec. 50
---	--------

$\ddot{y}_P - \ddot{f}_1 \sin \varphi_1 - f_1 \cos \varphi_1 \alpha_1 - 2\dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1 + f_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 = 0$	Ec. 51
---	--------

$\ddot{x}_P - \ddot{f}_2 \cos \varphi_2 + f_2 \sin \varphi_2 \alpha_2 + 2\dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + f_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 = 0$	Ec. 52
---	--------

$\ddot{y}_P - \ddot{f}_2 \sin \varphi_2 - f_2 \cos \varphi_2 \alpha_2 - 2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 + f_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 = 0$	Ec. 53
---	--------

Este conjunto de ecuaciones puede ser representado por:

$[A][\ddot{x}_P \ \ddot{y}_P]^T + [C] + [B] \cdot [\ddot{f}_1 \ \alpha_1 \ \ddot{f}_2 \ \alpha_2]^T = 0$	Ec. 54
--	--------

Donde:

$[C] = \begin{bmatrix} 2\dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1 + f_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 \\ -2\dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1 + f_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 \\ 2\dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + f_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 \\ -2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 + f_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 \end{bmatrix}$	Ec. 55
--	--------

Con lo que se obtiene:

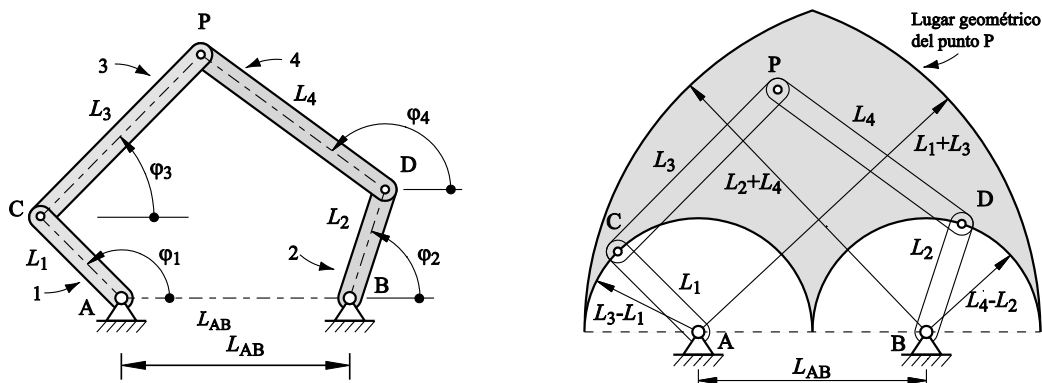
$[\ddot{f}_1 \ \alpha_1 \ \ddot{f}_2 \ \alpha_2]^T = -\text{inv}([B]) \cdot ([A][\ddot{x}_P \ \ddot{y}_P]^T + [C])$	Ec. 56
---	--------

4.1.2 Manipulador 2-RRR

1- Configuración general

En la Fig. 15.a se presenta el esquema general de un manipulador 2-RRR; se presenta un análisis de la cinemática y dinámica del manipulador. Las coordenadas de entrada son los ángulos de los eslabones con apoyo en A y en B: $[\phi_1, \phi_2]^T$.

Fig. 15 Manipulador 2-RRR



a. Configuración general

b. Espacio de trabajo del manipulador 2-RRR

El espacio de trabajo se obtiene trazando las circunferencias con centros en los apoyos fijos y con radio igual a la suma y al valor absoluto de la resta de las longitudes de los eslabones. En la Fig. 15.b se muestra el espacio de trabajo de este manipulador.

2- Cinemática directa

El vector de coordenadas del manipulador está dado por $[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, x_P, y_P]^T$. En la cinemática directa se conocen los ángulos de los eslabones de entrada $[\varphi_1, \varphi_2]^T$ y se requiere determinar el conjunto de coordenadas dadas por $[\varphi_3, \varphi_4, x_P, y_P]^T$. Las ecuaciones se obtienen del análisis geométrico:

$$x_P = L_1 \cos \varphi_1 + L_3 \cos \varphi_3 = L_{AB} + L_2 \cos \varphi_2 + L_4 \cos \varphi_4$$

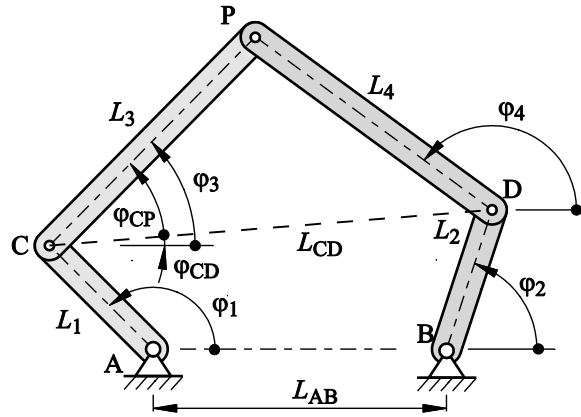
Ec. 57

$$y_P = L_1 \sin \varphi_1 + L_3 \sin \varphi_3 = L_2 \sin \varphi_2 + L_4 \sin \varphi_4$$

Ec. 58

Conocidos φ_1 y φ_2 se puede determinar la posición de los pares C y D, respectivamente. Para el análisis de la cinemática directa se utiliza la Fig. 16, se analiza el triángulo CPD, para determinar la distancia L_{CD} y los ángulos φ_{CD} y φ_{CP} .

Fig. 16 Cinemática directa en el manipulador 2-RRR



$$L_{CD} = \sqrt{(L_{AB} + L_2 \cos \varphi_2 - L_1 \cos \varphi_1)^2 + (L_2 \sin \varphi_2 - L_1 \sin \varphi_1)^2}$$

Ec. 59

$$\varphi_{CP} = \arccos \left(\frac{L_{CD}^2 + L_3^2 - L_4^2}{2 L_{CD} L_3} \right)$$

Ec. 60

$$\varphi_{CD} = \arctan \left(\frac{L_2 \sin \varphi_2 - L_1 \sin \varphi_1}{L_{AB} + L_2 \cos \varphi_2 - L_1 \cos \varphi_1} \right)$$

Ec. 61

El ángulo φ_3 se obtiene mediante:

$$\varphi_3 = \varphi_{CP} + \varphi_{CD}$$

Ec. 62

Utilizando la Ec. 57 y la Ec. 58 se determina la posición del par P. Con esta información es posible determinar a φ_4 :

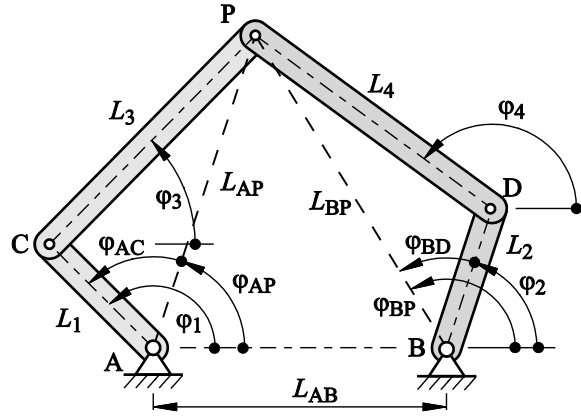
$$\varphi_4 = \arctan \left(\frac{y_P - L_2 \sin \varphi_2}{x_P - L_{AB} - L_2 \cos \varphi_2} \right)$$

Ec. 63

3- Cinemática inversa

En la cinemática inversa se requiere determinar el conjunto de coordenadas $[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4]^T$ a partir de las coordenadas del punto P, punto del elemento terminal. El análisis de la cinemática inversa se basa en la Fig. 17.

Fig. 17 Cinemática inversa del manipulador 2-RRR



Analizando el triángulo ACP, se obtienen las siguientes relaciones:

$L_{AP} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$	Ec. 64	$\varphi_{AP} = \text{atan} \left(\frac{y_P}{x_P} \right)$	Ec. 65
---------------------------------	--------	---	--------

$\varphi_{AC} = \text{acos} \left(\frac{L_{AP}^2 + L_1^2 - L_3^2}{2 L_{AP} L_1} \right)$	Ec. 66	$\varphi_1 = \varphi_{AC} + \varphi_{AP}$	Ec. 67
---	--------	---	--------

Del triángulo BPD se obtiene:

$L_{BP} = \sqrt{(x_P - L_{AB})^2 + y_P^2}$	Ec. 68	$\varphi_{BP} = \text{atan} \left(\frac{y_P}{x_P - L_{AB}} \right)$	Ec. 69
--	--------	--	--------

$\varphi_{BD} = \text{acos} \left(\frac{L_{BP}^2 + L_2^2 - L_4^2}{2 L_{BP} L_2} \right)$	Ec. 70	$\varphi_2 = \varphi_{BP} - \varphi_{BD}$	Ec. 71
---	--------	---	--------

Conocidas φ_1 y φ_2 , se puede determinar los ángulos φ_3 y φ_4 . El ángulo φ_4 se determina utilizando la Ec. 63. El ángulo φ_3 se determina de una manera similar:

$\varphi_3 = \text{atan} \left(\frac{y_P - L_1 \sin \varphi_1}{x_P - L_1 \cos \varphi_1} \right)$	Ec. 72
--	--------

4- Análisis de velocidades

El análisis de velocidades directo requiere conocer las componentes de velocidad del punto P, $[\dot{x}_P, \dot{y}_P]$ en función de las velocidades de los eslabones conductores $[\omega_1, \omega_2]$.

Derivando con respecto al tiempo las ecuaciones de enlace, se obtiene:

$-L_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - L_3 \sin \varphi_3 \omega_3 + L_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + L_4 \sin \varphi_4 \omega_4 = 0$	Ec. 73
--	--------

$L_1 \cos \varphi_1 \omega_1 + L_3 \cos \varphi_3 \omega_3 - L_2 \cos \varphi_2 \omega_2 - L_4 \cos \varphi_4 \omega_4 = 0$	Ec. 74
---	--------

$-L_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - L_3 \sin \varphi_3 \omega_3 - \dot{x}_P = 0$	Ec. 75
--	--------

$L_1 \cos \varphi_1 \omega_1 + L_3 \cos \varphi_3 \omega_3 - \dot{y}_P = 0$	Ec. 76
---	--------

El conjunto de ecuaciones dados por Ec. 73, Ec. 74, Ec. 75 y Ec. 76, puede ser expresado mediante

$\begin{bmatrix} -L_1 \sin \varphi_1 & L_2 \sin \varphi_2 \\ L_1 \cos \varphi_1 & -L_2 \cos \varphi_2 \\ -L_1 \sin \varphi_1 & 0 \\ L_1 \cos \varphi_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_3 \sin \varphi_3 & L_4 \sin \varphi_4 & 0 & 0 \\ L_3 \cos \varphi_3 & -L_4 \cos \varphi_4 & 0 & 0 \\ -L_3 \sin \varphi_3 & 0 & -1 & 0 \\ L_3 \cos \varphi_3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \\ \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	Ec. 77
--	--------

En forma simplificada:

$[J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i] + [J_{q,d}] \cdot [\dot{q}_d] = 0$	Ec. 78
---	--------

Siendo $J_{q,i}$ y $J_{q,d}$, respectivamente, la matriz jacobiana asociada al vector de coordenadas generalizadas independientes y dependientes. Estas matrices están dadas por:

$[J_{q,i}] = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \varphi_1 & L_2 \sin \varphi_2 \\ L_1 \cos \varphi_1 & -L_2 \cos \varphi_2 \\ -L_1 \sin \varphi_1 & 0 \\ L_1 \cos \varphi_1 & 0 \end{bmatrix}$	Ec. 79	$[J_{q,d}] = \begin{bmatrix} -L_3 \sin \varphi_3 & L_4 \sin \varphi_4 & 0 & 0 \\ L_3 \cos \varphi_3 & -L_4 \cos \varphi_4 & 0 & 0 \\ -L_3 \sin \varphi_3 & 0 & -1 & 0 \\ L_3 \cos \varphi_3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	Ec. 80
---	--------	---	--------

De la Ec. 78 se obtiene:

$[\dot{q}_d] = -\text{inv}([J_{q,d}]) \cdot ([J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i])$	Ec. 81
--	--------

En el análisis de velocidades inverso, se tienen conocidas la velocidad del punto P (\dot{x}_P, \dot{y}_P), punto del elemento terminal; se requiere determinar las velocidades $[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4]^T$ asociadas a las otras coordenadas generalizadas.

Reescribiendo las Ec. 73, Ec. 74, Ec. 75 y Ec. 76, se obtiene:

$\dot{x}_P + L_1 \sin \varphi_1 \omega_1 + L_3 \sin \varphi_3 \omega_3 = 0$	Ec. 82	$\dot{y}_P - L_1 \cos \varphi_1 \omega_1 - L_3 \cos \varphi_3 \omega_3 = 0$	Ec. 83
---	--------	---	--------

$\dot{x}_P + L_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + L_4 \sin \varphi_4 \omega_4 = 0$	Ec. 84	$\dot{y}_P - L_2 \cos \varphi_2 \omega_2 - L_4 \cos \varphi_4 \omega_4 = 0$	Ec. 85
---	--------	---	--------

Este sistema de ecuaciones se puede representar mediante:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \sin \varphi_1 & L_3 \sin \varphi_3 & 0 & 0 \\ -L_1 \cos \varphi_1 & -L_3 \cos \varphi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 \sin \varphi_2 & L_4 \sin \varphi_4 \\ 0 & 0 & -L_2 \cos \varphi_2 & -L_4 \cos \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_3 \\ \omega_2 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	Ec. 86
--	--------

En forma simplificada:

$[\mathbf{A}] \cdot [\dot{x}_P \quad \dot{y}_P]^T + [\mathbf{B}] \cdot [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4]^T = \mathbf{0}$	Ec. 87
--	--------

Con lo que se obtiene:

$[\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4]^T = -\text{inv}([\mathbf{B}]) \cdot ([\mathbf{A}] \cdot [\dot{x}_P \quad \dot{y}_P]^T)$	Ec. 88
--	--------

5- Análisis de aceleraciones

Para el análisis de aceleraciones, se procede a obtener la segunda derivada con respecto al tiempo de las ecuaciones de enlace, con lo que se obtiene:

$-L_1 \sin \varphi_1 \alpha_1 - L_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 - L_3 \sin \varphi_3 \alpha_3 - L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 + L_2 \sin \varphi_2 \alpha_2 + L_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 + L_4 \sin \varphi_4 \alpha_4 + L_4 \cos \varphi_4 \omega_4^2 = 0$	Ec. 89
--	--------

$L_1 \cos \varphi_1 \alpha_1 - L_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 + L_3 \cos \varphi_3 \alpha_3 - L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 - L_2 \cos \varphi_2 \alpha_2 + L_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 - L_4 \cos \varphi_4 \alpha_4 + L_4 \sin \varphi_4 \omega_4^2 = 0$	Ec. 90
---	--------

$-L_1 \sin \varphi_1 \alpha_1 - L_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 - L_3 \sin \varphi_3 \alpha_3 - L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 - \ddot{x}_P = 0$	Ec. 91
---	--------

$L_1 \cos \varphi_1 \alpha_1 - L_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 + L_3 \cos \varphi_3 \alpha_3 - L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 - \ddot{y}_P = 0$	Ec. 92
--	--------

Este conjunto de ecuaciones puede ser expresado mediante:

$[\mathbf{J}_{q,i}] \cdot [\ddot{\mathbf{q}}_i] + [\mathbf{J}_{q,d}] \cdot [\ddot{\mathbf{q}}_d] + [\mathbf{J}_q] \cdot [\dot{\mathbf{q}}] = \mathbf{0}$	Ec. 93
--	--------

Donde:

$[\mathbf{J}_q] \cdot [\dot{\mathbf{q}}] = \begin{bmatrix} -L_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 - L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 + L_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 + L_4 \cos \varphi_4 \omega_4^2 \\ -L_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 - L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 + L_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 + L_4 \sin \varphi_4 \omega_4^2 \\ -L_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 - L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 \\ -L_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 - L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 \end{bmatrix}$	Ec. 94
--	--------

En el análisis de aceleraciones inverso, se tiene conocida la aceleración del punto P (\ddot{x}_P , \ddot{y}_P), punto del elemento terminal; se requiere determinar las aceleraciones $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]^T$ asociadas a las otras coordenadas generalizadas.

Derivando con respecto al tiempo las Ec. 82, Ec. 83, Ec. 84 y Ec. 85, se obtiene:

$\ddot{x}_P + L_1 \sin \varphi_1 \alpha_1 + L_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 + L_3 \sin \varphi_3 \alpha_3 + L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 = 0$	Ec. 95
--	--------

$\ddot{y}_P - L_1 \cos \varphi_1 \alpha_1 + L_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 - L_3 \cos \varphi_3 \alpha_3 + L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 = 0$	Ec. 96
--	--------

$\ddot{x}_P + L_2 \sin \varphi_2 \alpha_2 + L_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 + L_4 \sin \varphi_4 \alpha_4 + L_4 \cos \varphi_4 \omega_4^2 = 0$	Ec. 97
--	--------

$\ddot{y}_P - L_2 \cos \varphi_2 \alpha_2 + L_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 - L_4 \cos \varphi_4 \alpha_4 + L_4 \sin \varphi_4 \omega_4^2 = 0$	Ec. 98
--	--------

Este sistema de ecuaciones se puede representar mediante:

$[A][\ddot{x}_P \quad \ddot{y}_P]^T + [C] + [B] \cdot [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]^T = \mathbf{0}$	Ec. 99
---	--------

Siendo:

$[C] = \begin{bmatrix} L_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 + L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 \\ L_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 + L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 \\ L_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 + L_4 \cos \varphi_4 \omega_4^2 \\ L_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 + L_4 \sin \varphi_4 \omega_4^2 \end{bmatrix}$	Ec. 100
--	---------

Con lo que se obtiene:

$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]^T = -\text{inv}([B]) \cdot ([A][\ddot{x}_P \quad \ddot{y}_P]^T + [C]) = \mathbf{0}$	Ec. 101
--	---------

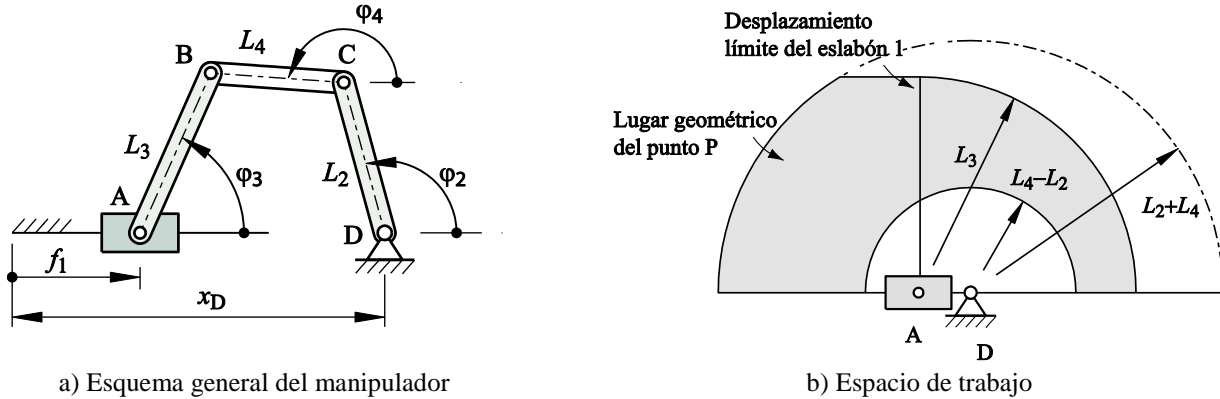
4.1.3 Manipulador PRR-RRR

1- Configuración general

En la Fig. 18.a se presenta el esquema general del manipulador de un manipulador de dos grados de libertad, con un actuador prismático y un actuador rotativo. Las coordenadas de entrada del manipulador es el desplazamiento f_1 del eslabón 1, a partir de una posición de referencia, y el ángulo del eslabón de entrada 2, φ_2 .

El espacio de trabajo está limitado por las circunferencias con centro en el par de rotación B, con radios iguales a la suma de las longitudes de los eslabones 2 y 4, y a la resta de las longitudes de los mismos eslabones. También está limitado por la longitud del eslabón 3, ya que la posición vertical del punto P está limitada por la longitud del eslabón 3. El movimiento también es definido, por la posición límite horizontal del eslabón 1. En la Fig. 18.b se muestra el espacio de trabajo del punto P a partir de las consideraciones establecidas.

Fig. 18 manipulador 2-PRR-RRR



2- Cinemática directa

El conjunto de coordenadas generalizadas del manipulador está dado por $[f_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, x_P, y_P]^T$. El análisis de la cinemática directa requiere que conocida las coordenadas de entrada $[f_1, \varphi_2]^T$, se determinen las coordenadas $[\varphi_3, \varphi_4, x_P, y_P]^T$. Las coordenadas del punto P se obtienen mediante:

$x_P = f_1 + L_3 \cos \varphi_3 = x_B + L_2 \cos \varphi_2 + L_4 \cos \varphi_4$	Ec. 102
--	---------

$$y_P = L_3 \sin \varphi_3 = L_2 \sin \varphi_2 + L_4 \sin \varphi_4$$

Ec. 103

De la Ec. 102 se obtiene:

$$L_3 \cos \varphi_3 = (x_B + L_2 \cos \varphi_2 - f_1) + L_4 \cos \varphi_4$$

Ec. 104

Elevando al cuadrado las Ec. 103 y Ec. 104, y sumando los términos se obtiene:

$$L_3^2 = (x_B + L_2 \cos \varphi_2 - f_1)^2 + L_4^2 + L_2^2 \sin^2 \varphi_2 + 2L_4(x_B + L_2 \cos \varphi_2 - f_1) \cos \varphi_4 + (2L_4 L_2 \sin \varphi_2) \sin \varphi_4$$

Ec. 105

Reescribiendo términos, se obtiene:

$$-(2L_4 L_2 \sin \varphi_2) \sin \varphi_4 = -(2L_4 L_2 \sin \varphi_2) \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_4} = [(x_B + L_2 \cos \varphi_2 - f_1)^2 + L_4^2 + L_2^2 \sin^2 \varphi_2 - L_3^2] + 2L_4(x_B + L_2 \cos \varphi_2 - f_1) \cos \varphi_4$$

Ec. 106

Elevando al cuadrado, se obtiene:

$$A \cos^2 \varphi_4 + B \cos \varphi_4 + C = 0$$

Ec. 107

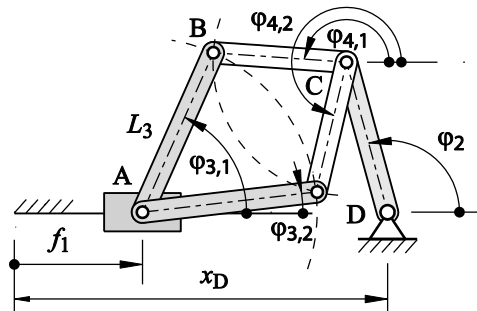
Donde:

$$\begin{aligned} A &= (2 L_4 L_2 \sin \varphi_2)^2 + 4 L_4^2 (x_B + L_2 \cos \varphi_2 - f_1)^2 \\ B &= 4 L_4 [(x_B + L_2 \cos \varphi_2 - f_1)^2 + L_4^2 + L_2^2 \sin^2 \varphi_2 - L_3^2] [x_B + L_2 \cos \varphi_2 - f_1] \\ C &= [(x_B + L_2 \cos \varphi_2 - f_1)^2 + L_4^2 + L_2^2 \sin^2 \varphi_2 - L_3^2]^2 - [2 L_4 L_2 \sin \varphi_2]^2 \end{aligned}$$

Ec. 108

La Ec. 107 tiene dos soluciones que se corresponden con las dos posibles configuraciones de ensamble del manipulador. En la Fig. 19 se representan las dos soluciones para φ_4 con sus dos posibles configuraciones.

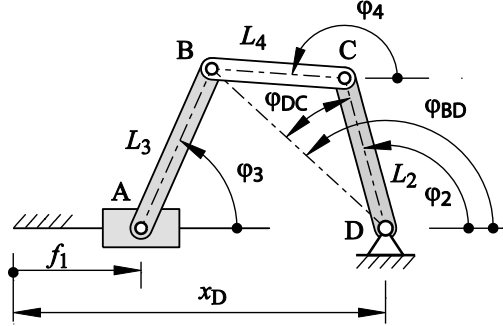
Fig. 19 Doble configuración de ensamble del manipulador 2-PRR-RRR



3- Cinemática inversa

El análisis de la cinemática inversa requiere que conocida las coordenadas de la posición del punto P, dado por $[x_P, y_P]^T$, se determinen las coordenadas $[f_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4]^T$. El análisis se basa en la Fig. 21.

Fig. 20 Análisis de la cinemática inversa, manipulador 2 PRR-RRR



La cadena PRR se obtiene mediante las Ec. 102 y Ec. 103:

$\varphi_3 = \arcsin(y_B/L_3)$	Ec. 109	$f_1 = x_B \cos \varphi_3$	Ec. 110
--------------------------------	---------	----------------------------	---------

Del triángulo BCD de la Fig. 21 se obtiene:

$L_{BD} = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + y_B^2}$	Ec. 111	$\varphi_3 = \arctan\left(\frac{y_B}{x_B - x_D}\right)$	Ec. 112
---	---------	---	---------

$\varphi_{DC} = \arccos\left(\frac{L_{BD}^2 + L_2^2 - L_4^2}{2L_{BD}L_2}\right)$	Ec. 113	$\varphi_2 = \varphi_{BD} - \varphi_{DC}$	Ec. 114
--	---------	---	---------

Conocidas φ_1 y φ_2 , se puede determinar los ángulos φ_3 y φ_4 . El ángulo φ_4 se determina mediante:

$\varphi_4 = \arctan\left(\frac{y_B - L_2 \sin \varphi_2}{x_B - x_D - L_2 \cos \varphi_2}\right)$	Ec. 115
---	---------

4- Análisis de velocidades

El análisis de velocidades directo requiere conocer las componentes de velocidad del punto P, $[\dot{x}_p, \dot{y}_p]$ en función de las velocidades de los eslabones conductores $[f_1, \omega_2]$. Derivando con respecto al tiempo las ecuaciones de enlace, se obtiene:

$\dot{f}_1 - L_3 \sin \varphi_3 \omega_3 + L_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + L_4 \sin \varphi_4 \omega_4 = 0$	Ec. 116
---	---------

$L_3 \cos \varphi_3 \omega_3 - L_2 \cos \varphi_2 \omega_2 - L_4 \cos \varphi_4 \omega_4 = 0$	Ec. 117
---	---------

$\dot{f}_1 - L_3 \sin \varphi_3 \omega_3 - \dot{x}_p = 0$	Ec. 118	$L_2 \cos \varphi_2 \omega_2 + L_4 \cos \varphi_4 \omega_4 - \dot{y}_p = 0$	Ec. 119
---	---------	---	---------

Este conjunto de ecuaciones puede ser expresado mediante:

$\begin{bmatrix} 1 & L_2 \cos \varphi_2 \\ 0 & -L_2 \sin \varphi_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & L_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_3 \sin \varphi_3 & L_4 \sin \varphi_4 & 0 & 0 \\ L_3 \cos \varphi_3 & -L_4 \cos \varphi_4 & 0 & 0 \\ -L_3 \sin \varphi_3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & L_4 \cos \varphi_4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \\ \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	Ec. 120
--	---------

En forma simplificada:

$[J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i] + [J_{q,d}] \cdot [\dot{q}_d] = \mathbf{0}$	Ec. 121
--	---------

Siendo $J_{q,i}$ y $J_{q,d}$, respectivamente, la matriz jacobiana asociada al vector de coordenadas generalizadas independientes y dependientes. Estas matrices están dadas por:

$[J_{q,i}] = \begin{bmatrix} 1 & L_2 \cos \varphi_2 \\ 0 & -L_2 \sin \varphi_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & L_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$	Ec. 122	$[J_{q,d}] = \begin{bmatrix} -L_3 \sin \varphi_3 & L_4 \sin \varphi_4 & 0 & 0 \\ L_3 \cos \varphi_3 & -L_4 \cos \varphi_4 & 0 & 0 \\ -L_3 \sin \varphi_3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & L_4 \cos \varphi_4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	Ec. 123
--	---------	---	---------

De la Ec. 121 se obtiene:

$[\dot{q}_d] = -\text{inv}([J_{q,d}]) \cdot ([J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i])$	Ec. 124
--	---------

En el análisis de velocidades inverso, se tienen conocidas la velocidad del punto P (\dot{x}_p, \dot{y}_p), punto del elemento terminal; se requiere determinar las velocidades asociadas a las otras coordenadas generalizadas, $[\dot{f}_1, \omega_1, \dot{f}_2, \omega_2]$.

Reescribiendo las Ec. 102 y Ec. 103, derivando con respecto al tiempo, siendo:

$\dot{x}_p - \dot{f}_1 + L_3 \sin \varphi_3 \omega_3 = 0$	Ec. 125	$\dot{y}_p - L_3 \cos \varphi_3 \omega_3 = 0$	Ec. 126
---	---------	---	---------

$\dot{x}_p + L_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + L_4 \sin \varphi_4 \omega_4 = 0$	Ec. 127	$\dot{y}_p - L_2 \cos \varphi_2 \omega_2 - L_4 \cos \varphi_4 \omega_4 = 0$	Ec. 128
---	---------	---	---------

Este sistema de ecuaciones se puede representar mediante:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & L_3 \sin \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & -L_3 \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & L_2 \sin \varphi_2 & 0 & L_4 \sin \varphi_4 \\ 0 & -L_2 \cos \varphi_2 & 0 & -L_4 \cos \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	Ec. 129
---	---------

En forma simplificada:

$[\mathbf{A}] \cdot [\dot{x}_p \quad \dot{y}_p]^T + [\mathbf{B}] \cdot [\dot{f}_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4]^T = \mathbf{0}$	Ec. 130
---	---------

Con lo que se obtiene:

$[\dot{f}_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4]^T = -\text{inv}([\mathbf{B}]) \cdot ([\mathbf{A}] \cdot [\dot{x}_p \quad \dot{y}_p]^T) = \mathbf{0}$	Ec. 131
--	---------

5- Análisis de aceleraciones

El análisis de aceleraciones se obtiene de la segunda derivada de las ecuaciones de enlace:

$\ddot{f}_1 - L_3 \sin \varphi_3 \alpha_3 - L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 + L_2 \sin \varphi_2 \alpha_2 + L_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 + L_4 \sin \varphi_4 \alpha_4 + L_4 \cos \varphi_4 \omega_4^2 = 0$	Ec. 132
--	---------

$L_3 \cos \varphi_3 \alpha_3 - L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 - L_2 \cos \varphi_2 \alpha_2 + L_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 - L_4 \cos \varphi_4 \alpha_4 + L_4 \sin \varphi_4 \omega_4^2 = 0$	Ec. 133
---	---------

$\ddot{f}_1 - L_3 \sin \varphi_3 \alpha_3 - L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 - \ddot{x}_p = 0$	Ec. 134
---	---------

$L_2 \cos \varphi_2 \alpha_2 - L_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 + L_4 \cos \varphi_4 \alpha_4 - L_4 \sin \varphi_4 \omega_4^2 - \ddot{y}_p = 0$	Ec. 135
--	---------

El conjunto de ecuaciones dados por Ec. 132, Ec. 133, Ec. 134 y Ec. 135, puede ser expresado mediante:

$[J_{q,i}] \cdot [\ddot{q}_i] + [J_{q,d}] \cdot [\ddot{q}_d] + [J_q] \cdot [\dot{q}] = \mathbf{0}$	Ec. 136
--	---------

Donde:

$[J_q] \cdot [\dot{q}] = \begin{bmatrix} L_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 - L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 + L_4 \cos \varphi_4 \omega_4^2 \\ L_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 - L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 + L_4 \sin \varphi_4 \omega_4^2 \\ -L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 \\ -L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 \end{bmatrix}$	Ec. 137
--	---------

En el análisis de aceleraciones inverso, se tiene conocida la aceleración del punto P(\ddot{x}_p , \ddot{y}_p), punto del elemento terminal; se requiere determinar las aceleraciones $[\ddot{f}_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]^T$, asociadas a las otras coordenadas generalizadas.

$\ddot{x}_p - \ddot{f}_1 + L_3 \sin \varphi_3 \alpha_3 + L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 = 0$	Ec. 138
---	---------

$\ddot{y}_p - L_3 \cos \varphi_3 \alpha_3 - L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 = 0$	Ec. 139
--	---------

$\ddot{x}_p + L_2 \sin \varphi_2 \alpha_2 + L_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 + L_4 \sin \varphi_4 \alpha_4 + L_4 \cos \varphi_4 \omega_4^2 = 0$	Ec. 140
--	---------

$\ddot{y}_p - L_2 \cos \varphi_2 \alpha_2 + L_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 - L_4 \cos \varphi_4 \alpha_4 + L_4 \sin \varphi_4 \omega_4^2 = 0$	Ec. 141
--	---------

Este sistema de ecuaciones se puede representar mediante:

$[A][\ddot{x}_p \ \ddot{y}_p]^T + [C] + [B] \cdot [\ddot{f}_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4]^T = \mathbf{0}$	Ec. 142
---	---------

Donde:

$[C] = \begin{bmatrix} L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 \\ L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 \\ L_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 + L_4 \cos \varphi_4 \omega_4^2 \\ L_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 + L_4 \sin \varphi_4 \omega_4^2 \end{bmatrix}$	Ec. 143
--	---------

Finalmente:

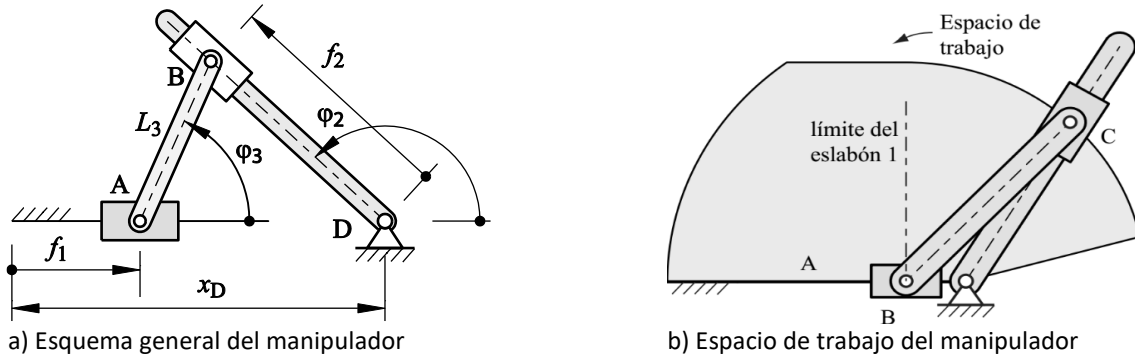
$[\ddot{f}_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4]^T = \text{inv}([B]) \cdot ([A][\ddot{x}_p \ \ddot{y}_p]^T + [C])$	Ec. 144
--	---------

4.1.4 Manipulador PRR-RPR

1- Configuración general

En la Fig. 21.a se presenta el esquema general del manipulador de dos grados de libertad, con un actuador prismático y un actuador rotativo. Las coordenadas de entrada del manipulador es el desplazamiento f_1 del eslabón 1, a partir de una posición de referencia, y el ángulo del eslabón de entrada 2, φ_2 .

Fig. 21 Manipulador 2-PRR-RPR



El espacio de trabajo está limitado por las circunferencias con centro en el par de rotación B, con radios iguales a la suma de las longitudes de los eslabones 2 y 4, y a la resta de las longitudes de los mismos eslabones. También está limitado por la longitud del eslabón 3, ya que la posición vertical del punto P está limitada por la longitud del eslabón 3. El movimiento también es definido, por la posición límite horizontal del eslabón 1. En la Fig. 21.b se muestra el espacio de trabajo del punto P a partir de las consideraciones establecidas.

2- Cinemática directa

El conjunto de coordenadas generalizadas del manipulador está dado por $[f_1, \varphi_2, f_2, \varphi_3, x_P, y_P]^T$. El análisis de la cinemática directa requiere que conocida las coordenadas de entrada $[f_1, \varphi_2]^T$, se determinen las coordenadas $[f_2, \varphi_3, x_P, y_P]^T$. Las coordenadas del punto P se obtienen mediante:

$$x_P = f_1 + L_3 \cos \varphi_3 = x_B + f_2 \cos \varphi_2$$

Ec. 145

$$y_P = L_3 \sin \varphi_3 = f_2 \sin \varphi_2$$

Ec. 146

De la Ec. 145 se obtiene:

$$L_3 \cos \varphi_3 = (x_B - f_1) + f_2 \cos \varphi_2$$

Ec. 147

Elevando al cuadrado las Ec. 146 y Ec. 147, y sumando los términos se obtiene:

$$L_3^2 = (x_B - f_1)^2 + f_2^2 + 2f_2(x_B - f_1) \cos \varphi_2$$

Ec. 148

Reescribiendo términos, expresados mediante:

$$f_2^2 + [2(x_B - f_1) \cos \varphi_2]f_2 + [(x_B - f_1)^2 - L_3^2] = 0$$

Ec. 149

La Ec. 149 tiene dos soluciones que se corresponden con las dos posibles configuraciones de ensamble del manipulador.

Reorganizando las Ec. 145 y Ec. 146 se obtiene:

$f_1 + L_3 \cos \varphi_3 - x_B = f_2 \cos \varphi_2$	Ec. 150	$L_3 \sin \varphi_3 = f_2 \sin \varphi_2$	Ec. 151
---	---------	---	---------

Donde:

$(f_1 + L_3 \cos \varphi_3 - x_B) \tan \varphi_2 = L_3 \sin \varphi_3$	Ec. 152
--	---------

En forma simplificada:

$(f_1 - x_B) \tan \varphi_2 + L_3 \cos \varphi_3 \tan \varphi_2 = L_3 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_3}$	Ec. 153
--	---------

Con lo que se obtiene:

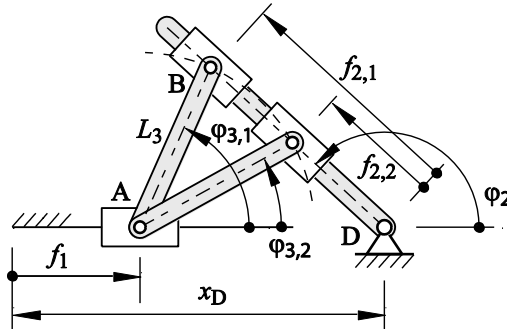
$[(f_1 - x_B) \tan \varphi_2]^2 + L_3^2 \tan^2 \varphi_2 \cos^2 \varphi_3 + 2(f_1 - x_B) \tan^2 \varphi_2 L_3 \cos \varphi_3 = L_3^2 - L_3^2 \cos^2 \varphi_3$	Ec. 154
--	---------

Finalmente:

$[L_3^2 \sec^2 \varphi_2] \cos^2 \varphi_3 + [2L_3 \tan^2 \varphi_2 (f_1 - x_B)] \cos \varphi_3 + [(f_1 - x_B)^2 \tan^2 \varphi_2 - L_3^2] = 0$	Ec. 155
---	---------

La Ec. 155 tiene dos soluciones relacionadas con las dos posibles configuraciones de ensamble del mecanismo. En la Fig. 22 se presentan las dos configuraciones posibles para un conjunto de valores de entrada $[f_1, \varphi_2]$.

Fig. 22 Doble configuración de ensamble del manipulador 2-PRR-RPR



3- Cinemática inversa

El análisis de la cinemática inversa requiere que conocida las coordenadas de la posición del punto P, dado por $[x_P, y_P]^T$, se determinen las coordenadas $[f_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4]^T$. La cadena PRR se obtiene mediante las Ec. 145 y Ec. 146:

$\varphi_3 = \arcsin(y_P/L_3)$	Ec. 156	$f_1 = x_P - L_3 \cos \varphi_3$	Ec. 157
--------------------------------	---------	----------------------------------	---------

Del análisis de la cadena RPR, se obtiene:

$f_2 = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + y_P^2}$	Ec. 158	$\varphi_2 = \arctan \frac{y_P}{x_P - x_B}$	Ec. 159
--------------------------------------	---------	---	---------

4- Análisis de velocidades

El análisis de velocidades directo consiste en determinar las componentes de velocidad del punto P, y las velocidades angulares de los eslabones 2 y 3, conocida las velocidades de los eslabones conductores. Derivando las ecuaciones de enlace dadas por Ec. 145 y Ec. 146, se obtiene:

$\dot{f}_1 - L_3 \sin \varphi_3 \omega_3 - \dot{f}_2 \cos \varphi_2 + f_2 \sin \varphi_2 \omega_2 = 0$	Ec. 160
--	---------

$L_3 \cos \varphi_3 \omega_3 - \dot{f}_2 \sin \varphi_2 - f_2 \cos \varphi_2 \omega_2 = 0$	Ec. 161
--	---------

$\dot{f}_1 - L_3 \sin \varphi_3 \omega_3 - \dot{x}_p = 0$	Ec. 162	$\dot{f}_2 \sin \varphi_2 - f_2 \cos \varphi_2 \omega_2 - \dot{y}_p = 0$	Ec. 163
---	---------	--	---------

El conjunto de ecuaciones dado por Ec. 160, Ec. 161, Ec. 162 y Ec. 163, puede ser reescrito mediante:

$\begin{bmatrix} 1 & f_2 \sin \varphi_2 \\ 0 & -f_2 \cos \varphi_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & f_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos \varphi_2 & -L_3 \sin \varphi_3 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & L_3 \cos \varphi_3 & 0 & 0 \\ 0 & -L_3 \sin \varphi_3 & -1 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{f}_2 \\ \omega_3 \\ \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	Ec. 164
--	---------

En forma simplificada:

$[J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i] + [J_{q,d}] \cdot [\dot{q}_d] = 0$	Ec. 165
---	---------

Siendo $J_{q,i}$ y $J_{q,d}$, respectivamente, la matriz jacobiana asociada al vector de coordenadas generalizadas independientes y dependientes. Estas matrices están dadas por:

$[J_{q,i}] = \begin{bmatrix} 1 & f_2 \sin \varphi_2 \\ 0 & -f_2 \cos \varphi_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & f_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$	Ec. 166	$[J_{q,d}] = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_2 & -L_3 \sin \varphi_3 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & L_3 \cos \varphi_3 & 0 & 0 \\ 0 & -L_3 \sin \varphi_3 & -1 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	Ec. 167
--	---------	--	---------

De la Ec. 165 se obtiene:

$[\dot{q}_d] = -\text{inv}([J_{q,d}]) \cdot ([J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i])$	Ec. 168
--	---------

En el análisis de velocidades inverso, se tienen conocidas la velocidad del punto P (\dot{x}_p, \dot{y}_p), punto del elemento terminal; se requiere determinar las velocidades $[\dot{f}_1, \dot{f}_2, \omega_2, \omega_3]^T$ asociadas a las otras coordenadas generalizadas.

Reescribiendo las Ec. 160, Ec. 161, Ec. 162 y Ec. 163, expresadas como:

$\dot{x}_p - \dot{f}_1 + L_3 \sin \varphi_3 \omega_3 = 0$	Ec. 169	$\dot{y}_p - L_3 \cos \varphi_3 \omega_3 = 0$	Ec. 170
---	---------	---	---------

$\dot{x}_p - \dot{f}_2 \cos \varphi_2 + f_2 \sin \varphi_2 \omega_2 = 0$	Ec. 171	$\dot{y}_p - \dot{f}_2 \sin \varphi_2 - f_2 \cos \varphi_2 \omega_2 = 0$	Ec. 172
--	---------	--	---------

Este sistema de ecuaciones se puede representar mediante:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & L_3 \sin \varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & -L_3 \cos \varphi_3 \\ 0 & -\cos \varphi_2 & 0 & f_2 \sin \varphi_2 \\ 0 & -\sin \varphi_2 & 0 & f_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	Ec. 173
--	---------

En forma simplificada:

$[A] \cdot [\dot{x}_p \quad \dot{y}_p]^T + [B] \cdot [\dot{f}_1 \quad \dot{f}_2 \quad \omega_2 \quad \omega_3]^T = 0$	Ec. 174
---	---------

Con lo que se obtiene:

$[\dot{f}_1 \quad \dot{f}_2 \quad \omega_2 \quad \omega_3]^T = -\text{inv}([B]) \cdot ([A] \cdot [\ddot{x}_P \quad \ddot{y}_P]^T) = \mathbf{0}$	Ec. 175
---	---------

5- Análisis de aceleraciones

Para el análisis de aceleraciones directo, se derivan con respecto al tiempo las ecuaciones de velocidad dadas por las Ec. 160, Ec. 161, Ec. 162 y Ec. 163, con lo que se obtiene:

$\ddot{f}_1 - L_3 \sin \varphi_3 \alpha_3 - L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 - \ddot{f}_2 \cos \varphi_2 + 2\dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + f_2 \sin \varphi_2 \alpha_2 + f_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 = 0$	Ec. 176
---	---------

$L_3 \cos \varphi_3 \alpha_3 - L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 - \ddot{f}_2 \sin \varphi_2 - 2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 - f_2 \cos \varphi_2 \alpha_2 + f_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 = 0$	Ec. 177
--	---------

$\ddot{f}_1 - L_3 \sin \varphi_3 \alpha_3 - L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 - \ddot{x}_P = 0$	Ec. 178
---	---------

$\ddot{f}_2 \sin \varphi_2 + 2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 + f_2 \cos \varphi_2 \alpha_2 - f_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 - \ddot{y}_P = 0$	Ec. 179
---	---------

El conjunto de ecuaciones dado por Ec. 176, Ec. 177, Ec. 178 y Ec. 179, puede ser reescrito mediante:

$[J_{q,i}] \cdot [\ddot{q}_i] + [J_{q,d}] \cdot [\ddot{q}_d] + [J_q] \cdot [\dot{q}] = \mathbf{0}$	Ec. 180
--	---------

Donde:

$[J_q] \cdot [\dot{q}] = \begin{bmatrix} -L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 + 2\dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + f_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 \\ -L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 - 2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 + f_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 \\ -L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 \\ 2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 - f_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 \end{bmatrix}$	Ec. 181
--	---------

En el análisis de aceleraciones inverso, se tiene conocida la aceleración del punto P (\ddot{x}_P, \ddot{y}_P), punto del elemento terminal; se requiere determinar las aceleraciones $[\ddot{f}_1, \ddot{f}_2, \alpha_2, \alpha_3]^T$ asociadas a las otras coordenadas generalizadas. Derivando con respecto al tiempo las Ec. 169, Ec. 170, Ec. 171, Ec. 172 se obtiene:

$\ddot{x}_P - \ddot{f}_1 + L_3 \sin \varphi_3 \alpha_3 + L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 = 0$	Ec. 182
---	---------

$\ddot{y}_P - L_3 \cos \varphi_3 \alpha_3 + L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 = 0$	Ec. 183
--	---------

$\ddot{x}_P - \ddot{f}_2 \sin \varphi_2 - 2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 - f_2 \cos \varphi_2 \alpha_2 + f_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 = 0$	Ec. 184
---	---------

$\ddot{y}_P - \ddot{f}_2 \cos \varphi_2 + 2\dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + f_2 \sin \varphi_2 \alpha_2 - f_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 = 0$	Ec. 185
---	---------

Este sistema de ecuaciones se puede representar mediante:

$[A][\ddot{x}_P \quad \ddot{y}_P]^T + [C] + [B] \cdot [\ddot{f}_1 \quad \ddot{f}_2 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^T = \mathbf{0}$	Ec. 186
---	---------

Siendo:

$$[\dot{C}] = \begin{bmatrix} L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 \\ L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 \\ 2\dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + f_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 \\ -2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 + f_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 \end{bmatrix}$$

Ec. 187

Con lo que se obtiene:

$$[\ddot{f}_1 \quad \ddot{f}_2 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^T = -\text{inv}([B]) \cdot ([A][\ddot{x}_p \quad \ddot{y}_p]^T + [C]) = 0$$

Ec. 188

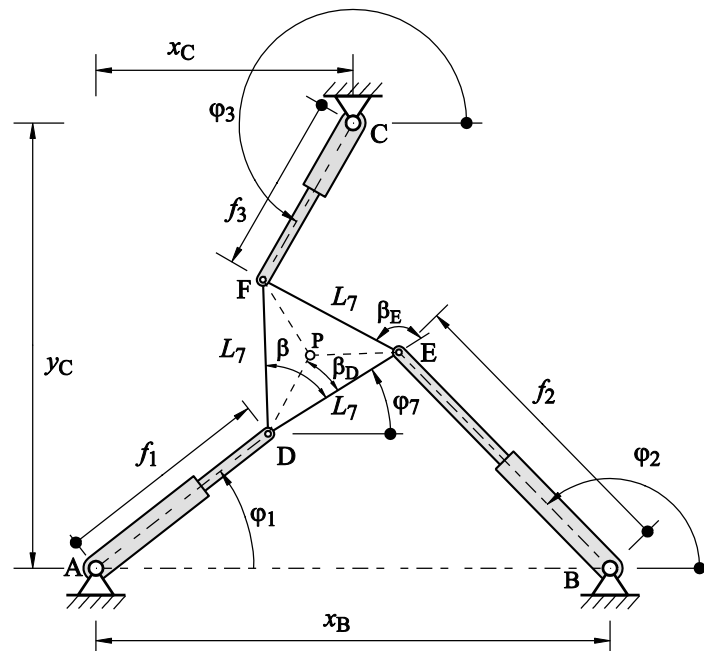
4.2 MANIPULADORES DE TRES GRADOS DE LIBERTAD

4.2.1 Manipulador 3-RPR

1 – Configuración general

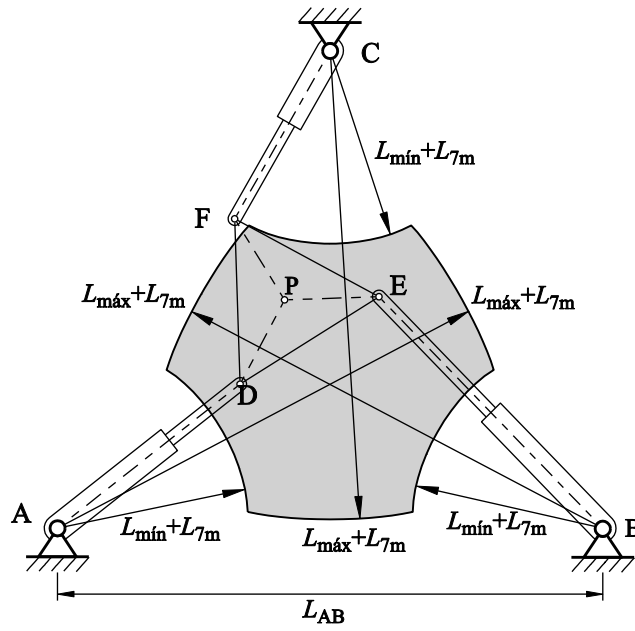
En la Fig. 23 se presenta una tercera versión del manipulador 3-RPR propuesta en [14].

Fig. 23 Manipulador 3-RPR



El espacio de trabajo del manipulador depende de la longitud mínima y máxima de los actuadores prismáticos, tal como se muestra en la Fig. 24.

Fig. 24 Espacio de trabajo del manipulador 3-RPR



2- Cinemática directa

El análisis de la cinemática directa consiste en determinar la posición del elemento terminal $[x_P, y_P, \varphi_7]$, y la orientación de los actuadores prismáticos, $[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$, a partir de las coordenadas de entrada, $[f_1, f_2, f_3]$.

Basado en la Fig. 24 se obtienen las siguientes relaciones:

$x_P = f_1 \cos \varphi_1 + L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D)$	Ec. 189
---	---------

$y_P = f_1 \sin \varphi_1 + L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D)$	Ec. 190
---	---------

$f_1 \cos \varphi_1 + L_7 \cos(\varphi_7 + \beta) = x_C + f_3 \cos \varphi_3$	Ec. 191
---	---------

$f_1 \sin \varphi_1 + L_7 \sin(\varphi_7 + \beta) = y_C + f_3 \sin \varphi_3$	Ec. 192
---	---------

$x_B + f_2 \cos \varphi_2 + L_7 \cos(\varphi_7 + \beta_E) = x_C + f_3 \cos \varphi_3$	Ec. 193
---	---------

$f_2 \sin \varphi_2 + L_7 \sin(\varphi_7 + \beta_E) = y_C + f_3 \sin \varphi_3$	Ec. 194
---	---------

Hay dos formas de ensamblar el mecanismo para una configuración de las coordenadas de entradas, $[f_1, f_2, f_3]$. Dado que en este manipulador se requiere implementar una solución numérica para resolver la cinemática directa, la solución para cada configuración depende del sistema de ecuaciones que se formule.

De la combinación de las Ec. 189 a la Ec. 194, se obtiene:

$g_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_7) = f_1 \cos \varphi_1 + L_7 \cos(\varphi_7 + \beta) - x_C - f_3 \cos \varphi_3 = 0$	Ec. 195
---	---------

$g_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_7) = f_1 \sin \varphi_1 + L_7 \sin(\varphi_7 + \beta) - y_C - f_3 \sin \varphi_3 = 0$	Ec. 196
---	---------

$g_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_7) = x_B + f_2 \cos \varphi_2 + L_7 \cos(\varphi_7 + \beta_E) - x_C - f_3 \cos \varphi_3 = 0$	Ec. 197
---	---------

$g_4(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_7) = f_2 \sin \varphi_2 + L_7 \sin(\varphi_7 + \beta_E) - y_C - f_3 \sin \varphi_3 = 0$	Ec. 198
---	---------

Con el cual se obtiene un sistema no lineal 4x4. Este sistema se puede resolver utilizando el método de Newton-Raphson. Para este procedimiento se requiere obtener Δg_i , con $i = 1, 2, 3, 4$, dado por:

$\Delta g_i = \left[\frac{\partial g_i}{\partial \varphi_j} \right] \Delta \varphi_j$	Ec. 199
--	---------

con $j = 1, 2, 3$ y 7. En el método de Newton-Raphson se realiza un proceso iterativo hasta que las funciones sean muy cercanas a cero o no exista variación en los valores de la coordenada angular. De esta forma, se tiene:

$g_{i,k+1} - g_{i,k} = \left[\frac{\partial g_i}{\partial \varphi_j} \right] (\varphi_{j,k+1} - \varphi_{j,k})$	Ec. 200
--	---------

En forma matricial, expresado como:

$[g]_{k+1} - [g]_k = J_\varphi \cdot (\varphi_{j,k+1} - \varphi_{j,k})$	Ec. 201
---	---------

siendo $J_\varphi = \left[\frac{\partial g_i}{\partial \varphi_j} \right]$ la matriz jacobiana.

Debido a que se busca los valores de las coordenadas que hacen que las funciones g_i sean cero, se puede obtener los nuevos valores de las coordenadas mediante:

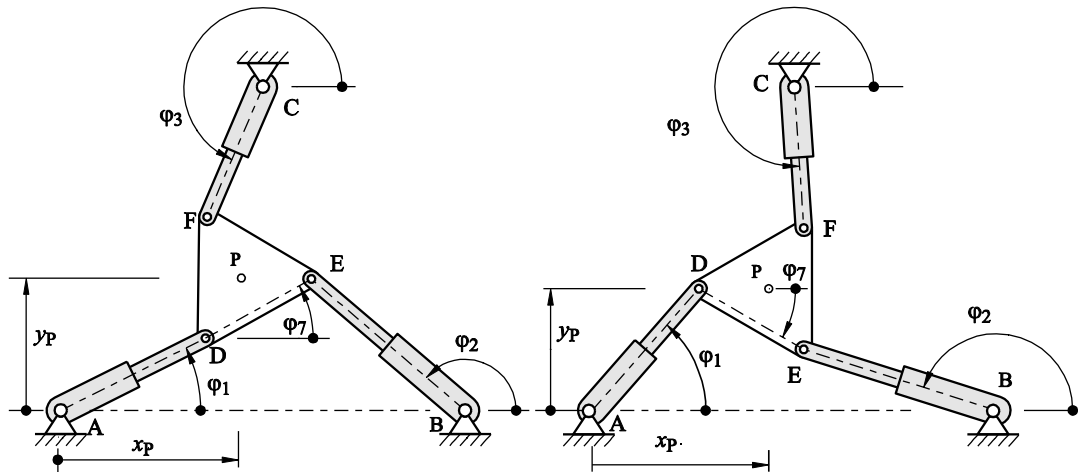
$[\varphi]_{k+1} = [\varphi]_k - J_\varphi \cdot [g]_k$	Ec. 202
---	---------

La matriz jacobiana para el sistema formulado, está dada por:

$J_\varphi = \begin{bmatrix} -f_1 \sin \varphi_1 & f_3 \sin \varphi_3 & 0 & -L_7 \sin(\varphi_7 + \beta) \\ f_1 \cos \varphi_1 & -f_3 \cos \varphi_3 & 0 & L_7 \cos(\varphi_7 + \beta) \\ 0 & f_3 \sin \varphi_3 & -f_2 \sin \varphi_2 & -L_7 \sin(\varphi_7 + \beta_E) \\ 0 & -f_3 \cos \varphi_3 & f_2 \cos \varphi_2 & L_7 \cos(\varphi_7 + \beta_E) \end{bmatrix}$	Ec. 203
--	---------

En la Fig. 25 se presenta las dos configuraciones obtenidas con los dos sistemas de ecuaciones propuestos, con parámetros iguales, e idénticos valores en las coordenadas de entrada, $[f_1, f_2, f_3]$. Esta característica puede ser un inconveniente para controlar la posición y la pose del elemento terminal.

Fig. 25 Configuraciones del manipulador 3-RPR para unas coordenadas de entrada



En el análisis de la cinemática inversa, se conoce las coordenadas del elemento terminal: $[x_P, y_P, \varphi_7]$. A partir de estos datos, se requiere determinar las coordenadas de los eslabones de entrada $[f_1, f_2, f_3]$ y la orientación de los actuadores: $[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$.

Basado en la geometría de la Fig. 25, se obtiene:

$f_1 = \sqrt{(x_P - L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D))^2 + (y_P - L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D))^2}$	Ec. 204
--	---------

$\varphi_1 = \text{atan} \frac{y_P - L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D)}{x_P - L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D)}$	Ec. 205
---	---------

$f_2 = \sqrt{(x_P + L_{PD} \cos(\varphi_7 - \beta_D) - x_B)^2 + (y_P + L_{PD} \sin(\varphi_7 - \beta_D) - y_B)^2}$	Ec. 206
--	---------

$\varphi_2 = \text{atan} \frac{y_P + L_{PD} \sin(\varphi_7 - \beta_D) - y_B}{x_P + L_{PD} \cos(\varphi_7 - \beta_D) - x_B}$	Ec. 207
---	---------

$f_3 = \sqrt{(x_P + L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_E - \beta_D) - x_C)^2 + (y_P + L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_E - \beta_D) - y_C)^2}$	Ec. 208
--	---------

$\varphi_3 = \text{atan} \frac{y_P + L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_E - \beta_D) - y_C}{x_P + L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_E - \beta_D) - x_C}$	Ec. 209
---	---------

4 – Análisis de velocidades

El análisis de velocidades directo requiere conocer las componentes de velocidad del punto P, $[\dot{x}_P, \dot{y}_P, \omega_7]$ en función de las velocidades de los eslabones conductores $[\dot{f}_1, \dot{f}_2, \dot{f}_3]$. Derivando con respecto al tiempo las ecuaciones de enlace del manipulador dadas por las Ec. 189 a la Ec. 194, se obtiene:

$\dot{f}_1 \cos \varphi_1 - f_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7 = \dot{x}_P$	Ec. 210
--	---------

$\dot{f}_1 \sin \varphi_1 + f_1 \cos \varphi_1 \omega_1 + L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7 = \dot{y}_P$	Ec. 211
--	---------

$\dot{f}_1 \cos \varphi_1 - f_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - L_7 \sin(\varphi_7 + \beta) \omega_7 - \dot{f}_3 \cos \varphi_3 + f_3 \sin \varphi_3 \omega_3 = 0$	Ec. 212
--	---------

$\dot{f}_1 \sin \varphi_1 + f_1 \cos \varphi_1 \omega_1 + L_7 \cos(\varphi_7 + \beta) \omega_7 - \dot{f}_3 \sin \varphi_3 - f_3 \cos \varphi_3 \omega_3 = 0$	Ec. 213
--	---------

$\dot{f}_2 \cos \varphi_2 - f_2 \sin \varphi_2 \omega_2 - L_7 \sin(\varphi_7 + \beta_E) \omega_7 - \dot{f}_3 \cos \varphi_3 + f_3 \sin \varphi_3 \omega_3 = 0$	Ec. 214
--	---------

$\dot{f}_2 \sin \varphi_2 + f_2 \cos \varphi_2 \omega_2 + L_7 \cos(\varphi_7 + \beta_E) \omega_7 - \dot{f}_3 \sin \varphi_3 - f_3 \cos \varphi_3 \omega_3 = 0$	Ec. 215
--	---------

El sistema de ecuaciones dado por las Ec. 210 a Ec. 215 se puede representar en forma matricial mediante:

$[J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i] + [J_{q,d}] \cdot [\dot{q}_d] = 0$	Ec. 216
---	---------

Donde:

$[J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \cos \varphi_1 & 0 & -\cos \varphi_3 \\ \sin \varphi_1 & 0 & -\sin \varphi_3 \\ 0 & \cos \varphi_2 & -\cos \varphi_3 \\ 0 & \sin \varphi_2 & -\sin \varphi_3 \end{bmatrix}$	Ec. 217
--	---------

$[J_{q,d}] \cdot [\dot{q}_d] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D) & -f_1 \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D) & f_1 \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_7 \sin(\varphi_7 + \beta) & -f_1 \sin \varphi_1 & 0 & f_3 \sin \varphi_3 \\ 0 & 0 & L_7 \cos(\varphi_7 + \beta) & f_1 \cos \varphi_1 & 0 & -f_3 \cos \varphi_3 \\ 0 & 0 & -L_7 \sin(\varphi_7 + \beta_E) & 0 & -f_2 \sin \varphi_2 & f_3 \sin \varphi_3 \\ 0 & 0 & L_7 \cos(\varphi_7 + \beta_E) & 0 & f_2 \cos \varphi_2 & -f_3 \cos \varphi_3 \end{bmatrix}$	Ec. 218
--	---------

De la Ec. 216, se obtiene:

$[\dot{q}_d] = -\text{inv}([J_{q,d}]) \cdot ([J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i])$	Ec. 219
--	---------

En el análisis de velocidades inverso, se tienen conocidas la velocidad angular del elemento terminal y la velocidad del punto P ($\omega_7, \dot{x}_P, \dot{y}_P$), punto del elemento terminal; se requiere determinar las velocidades $[\dot{f}_1, \dot{f}_2, \dot{f}_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ asociadas a las otras coordenadas generalizadas.

$\dot{x}_P - \dot{f}_1 \cos \varphi_1 + f_1 \sin \varphi_1 \omega_1 + L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7 = 0$	Ec. 220
--	---------

$\dot{y}_P - \dot{f}_1 \sin \varphi_1 - f_1 \cos \varphi_1 \omega_1 - L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7 = 0$	Ec. 221
--	---------

$\dot{x}_P - \dot{f}_2 \cos \varphi_2 + f_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D + \beta_E) \omega_7 = 0$	Ec. 222
--	---------

$\dot{y}_P - \dot{f}_2 \sin \varphi_2 - f_2 \cos \varphi_2 \omega_2 - L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D + \beta_E) \omega_7 = 0$	Ec. 223
--	---------

$\dot{x}_P - \dot{f}_3 \cos \varphi_3 + f_3 \sin \varphi_3 \omega_3 - L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_E - \beta_D) \omega_7 = 0$	Ec. 224
--	---------

$\dot{y}_P - \dot{f}_3 \sin \varphi_3 - f_3 \cos \varphi_3 \omega_3 + L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D - \beta_E) \omega_7 = 0$	Ec. 225
--	---------

Este sistema de ecuaciones se puede representar mediante:

$[\mathbf{A}] \cdot [\dot{x}_P \quad \dot{y}_P \quad \omega_7]^T + [\mathbf{B}] \cdot [\dot{f}_1 \quad \omega_1 \quad \dot{f}_2 \quad \omega_2 \quad \dot{f}_3 \quad \omega_3]^T = \mathbf{0}$	Ec. 226
--	---------

Donde:

$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D) \\ 0 & 1 & -L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D) \\ 1 & 0 & L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D + \beta_E) \\ 0 & 1 & -L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D + \beta_E) \\ 1 & 0 & L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_E - \beta_D) \\ 0 & 1 & -L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_E - \beta_D) \end{bmatrix}$	Ec. 227
--	---------

$[B] = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_1 & f_1 \sin \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & -f_1 \cos \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \varphi_2 & f_2 \sin \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \varphi_2 & -f_2 \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \varphi_3 & f_3 \sin \varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \varphi_3 & -f_3 \cos \varphi_3 \end{bmatrix}$	Ec. 228
--	---------

Con lo que se obtiene:

$[\dot{f}_1 \quad \omega_1 \quad \dot{f}_2 \quad \omega_2 \quad \dot{f}_3 \quad \omega_3]^T = -\text{inv}([B]) \cdot [A] \cdot [\dot{x}_p \quad \dot{y}_p \quad \omega_7]^T$	Ec. 229
--	---------

5 – Análisis de aceleraciones

Para el análisis de aceleraciones, se obtiene la segunda derivada de las ecuaciones obtenidas a partir de las condiciones de enlace. Derivando con respecto al tiempo las Ec. 210 a Ec. 215, se obtiene:

$\ddot{f}_1 \cos \varphi_1 - f_1 \sin \varphi_1 \alpha_1 - 2\dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - f_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 - L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D) \alpha_7 - L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7^2 = \ddot{x}_p$	Ec. 230
---	---------

$\ddot{f}_1 \sin \varphi_1 + f_1 \cos \varphi_1 \alpha_1 + 2\dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1 - f_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 + L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D) \alpha_7 - L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7^2 = \ddot{y}_p$	Ec. 231
---	---------

$\ddot{f}_1 \cos \varphi_1 - f_1 \sin \varphi_1 \alpha_1 - 2\dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - f_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 - L_7 \sin(\varphi_7 + \beta) \alpha_7 - L_7 \cos(\varphi_7 + \beta) \omega_7^2 - \ddot{f}_3 \cos \varphi_3 + f_3 \sin \varphi_3 \alpha_3 + 2\dot{f}_3 \sin \varphi_3 \omega_3 + f_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 = 0$	Ec. 232
---	---------

$\ddot{f}_1 \sin \varphi_1 + f_1 \cos \varphi_1 \alpha_1 + 2\dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1 - f_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 + L_7 \cos(\varphi_7 + \beta) \alpha_7 - L_7 \sin(\varphi_7 + \beta) \omega_7^2 - \ddot{f}_3 \sin \varphi_3 - f_3 \cos \varphi_3 \alpha_3 - 2\dot{f}_3 \cos \varphi_3 \omega_3 + f_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 = 0$	Ec. 233
---	---------

$\ddot{f}_2 \cos \varphi_2 - f_2 \sin \varphi_2 \alpha_2 - 2\dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2 - f_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 - L_7 \sin(\varphi_7 + \beta_E) \alpha_7 - L_7 \cos(\varphi_7 + \beta_E) \omega_7^2 - \ddot{f}_3 \cos \varphi_3 + f_3 \sin \varphi_3 \alpha_3 + 2\dot{f}_3 \sin \varphi_3 \omega_3 + f_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 = 0$	Ec. 234
---	---------

$\ddot{f}_2 \sin \varphi_2 + f_2 \cos \varphi_2 \alpha_2 + 2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 - f_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 + L_7 \cos(\varphi_7 + \beta_E) \alpha_7 - L_7 \sin(\varphi_7 + \beta_E) \omega_7^2 - \ddot{f}_3 \sin \varphi_3 - f_3 \cos \varphi_3 \alpha_3 - 2\dot{f}_3 \cos \varphi_3 \omega_3 + f_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 = 0$	Ec. 235
---	---------

Este conjunto de ecuaciones puede ser representado por:

$[J_{q,i}] \cdot [\ddot{q}_i] + [J_{q,d}] \cdot [\ddot{q}_d] + [J_q] \cdot [\dot{q}] = 0$	Ec. 236
---	---------

Donde

$[J_q] \cdot [\dot{q}] = \begin{bmatrix} -2\dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - f_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 - L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7^2 \\ 2\dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1 - f_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 - L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7^2 \\ -2\dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - f_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 - L_7 \cos(\varphi_7 + \beta) \omega_7^2 + 2\dot{f}_3 \sin \varphi_3 \omega_3 + f_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 \\ 2\dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1 - f_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 - L_7 \sin(\varphi_7 + \beta) \omega_7^2 - 2\dot{f}_3 \cos \varphi_3 \omega_3 + f_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 \\ -2\dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2 - f_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 - L_7 \cos(\varphi_7 + \beta_E) \omega_7^2 + 2\dot{f}_3 \sin \varphi_3 \omega_3 + f_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 \\ 2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 - f_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 - L_7 \sin(\varphi_7 + \beta_E) \omega_7^2 - 2\dot{f}_3 \cos \varphi_3 \omega_3 + f_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 \end{bmatrix}$	Ec. 237
---	---------

En el análisis de aceleraciones inverso, se tienen conocidas la aceleración del punto P (\ddot{x}_P , \ddot{y}_P , α_7), punto del elemento terminal; se requiere determinar las aceleraciones asociadas a las otras coordenadas generalizadas.

Derivando con respecto al tiempo las Ec. 220 a Ec. 225 se obtiene:

$\ddot{x}_P - \ddot{f}_1 \cos \varphi_1 + \dot{f}_1 \sin \varphi_1 \alpha_1 + 2\dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1 + \dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 + L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D) \alpha_7 + L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7^2 = 0$	Ec. 238
$\ddot{y}_P - \ddot{f}_1 \sin \varphi_1 - \dot{f}_1 \cos \varphi_1 \alpha_1 - 2\dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1 + \dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 - L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D) \alpha_7 + L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7^2 = 0$	Ec. 239
$\ddot{x}_P - \ddot{f}_2 \cos \varphi_2 + \dot{f}_2 \sin \varphi_2 \alpha_2 + 2\dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + \dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 + L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D + \beta_E) \alpha_7 + L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D + \beta_E) \omega_7^2 = 0$	Ec. 240
$\ddot{y}_P - \ddot{f}_2 \sin \varphi_2 - \dot{f}_2 \cos \varphi_2 \alpha_2 - 2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 + \dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 - L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D + \beta_E) \alpha_7 + L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D + \beta_E) \omega_7^2 = 0$	Ec. 241
$\ddot{x}_P - \ddot{f}_3 \cos \varphi_3 + \dot{f}_3 \sin \varphi_3 \alpha_3 + 2\dot{f}_3 \sin \varphi_3 \omega_3 + \dot{f}_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 - L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_E - \beta_D) \alpha_7 - L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_E - \beta_D) \omega_7^2 = 0$	Ec. 242
$\ddot{y}_P - \ddot{f}_3 \sin \varphi_3 - \dot{f}_3 \cos \varphi_3 \alpha_3 - 2\dot{f}_3 \cos \varphi_3 \omega_3 + \dot{f}_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 + L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_E - \beta_D) \alpha_7 - L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_E - \beta_D) \omega_7^2 = 0$	Ec. 243

Este conjunto de ecuaciones puede ser representado por:

$[A] \cdot [\ddot{x}_P \quad \ddot{y}_P \quad \alpha_7]^T + [C] + [B][\ddot{f}_1 \quad \alpha_1 \quad \ddot{f}_2 \quad \alpha_2 \quad \ddot{f}_3 \quad \alpha_3]^T = 0$	Ec. 244
---	---------

Donde:

$[C] = \begin{bmatrix} 2\dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1 + \dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 + L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7^2 \\ -2\dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1 + \dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 + L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7^2 \\ 2\dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + \dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 + L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_D + \beta_E) \omega_7^2 \\ -2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 + \dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 + L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_D + \beta_E) \omega_7^2 \\ 2\dot{f}_3 \sin \varphi_3 \omega_3 + \dot{f}_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 - L_{PD} \cos(\varphi_7 + \beta_E - \beta_D) \omega_7^2 \\ [-2\dot{f}_3 \cos \varphi_3 \omega_3 + \dot{f}_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 - L_{PD} \sin(\varphi_7 + \beta_E - \beta_D) \omega_7^2] \end{bmatrix}$	Ec. 245
---	---------

Con lo que se obtiene:

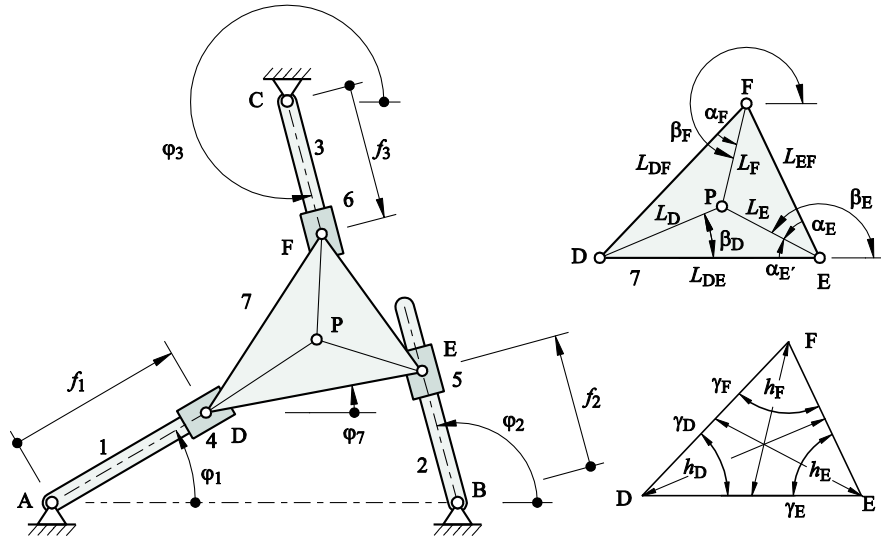
$[\ddot{f}_1 \quad \alpha_1 \quad \ddot{f}_2 \quad \alpha_2 \quad \ddot{f}_3 \quad \alpha_3]^T = -\text{inv}([B]) \cdot ([A][\ddot{x}_P \quad \ddot{y}_P]^T + [C])$	Ec. 246
---	---------

4.2.2 Manipulador 3-RPR

1 – Configuración general

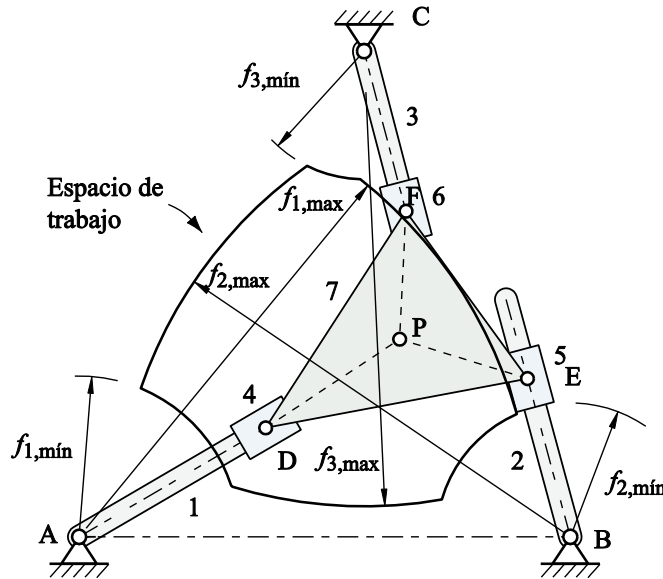
En la Fig. 26 se muestra el esquema general de un manipulador 3-RPR; la ubicación del elemento terminal (x_P , y_P) y su orientación, dado por φ_7 , dependen de los ángulos de rotación de los eslabones conductores: φ_1 , φ_2 y φ_3 .

Fig. 26 Manipulador 3-RPR



En la Fig. 27 se muestra el espacio de trabajo del manipulador 3-RPR. El espacio de trabajo se obtiene trazando circunferencias con centro en cada uno de los apoyos y con radios igual a la distancia mínima y máxima que el punto P puede estar de cada apoyo. Por ejemplo, la distancia mínima que el punto P puede estar del apoyo A está dado por la distancia L_D , ver Fig. 26.

Fig. 27 Espacio de trabajo del manipulador 3-RPR



2- Cinemática directa

El análisis de la cinemática directa consiste en determinar la posición del elemento terminal $[x_P, y_P, \varphi_7]$, y la ubicación de los pares de rotación entre las correderas y el elemento terminal, $[f_1, f_2, f_3]$, a partir de las coordenadas de entrada $[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$.

Las ecuaciones de enlace se obtienen basadas en la Fig. 26:

$$x_P = f_1 \cos \varphi_1 + L_D \cos(\varphi_7 + \beta_D)$$

Ec. 247

$$y_P = f_1 \sin \varphi_1 + L_D \sin(\varphi_7 + \beta_D)$$

Ec. 248

$x_P = x_B + f_2 \cos \varphi_2 + L_E \cos(\varphi_7 + \beta_E)$	Ec. 249
--	---------

$y_P = f_2 \sin \varphi_2 + L_E \sin(\varphi_7 + \beta_E)$	Ec. 250
--	---------

$x_P = x_C + f_3 \cos \varphi_3 + L_F \cos(\varphi_7 + \beta_F)$	Ec. 251
--	---------

$y_P = f_3 \sin \varphi_3 + L_F \sin(\varphi_7 + \beta_F)$	Ec. 252
--	---------

De la combinación lineal de la Ec. 247 y Ec. 248, se obtiene:

$L_D \cos(\varphi_7 + \beta_D) \sin \varphi_1 - L_D \sin(\varphi_7 + \beta_D) \cos \varphi_1 = x_P \sin \varphi_1 - y_P \cos \varphi_1$	Ec. 253
---	---------

Similarmemente, de la combinación lineal de la Ec. 249 y Ec. 250, expresada como:

$L_E \cos(\varphi_7 + \beta_E) \sin \varphi_2 - L_E \sin(\varphi_7 + \beta_E) \cos \varphi_2 = (x_P - x_B) \sin \varphi_2 - y_P \cos \varphi_2$	Ec. 254
---	---------

De la combinación lineal de la Ec. 251 y Ec. 252, expresado mediante:

$L_F \cos(\varphi_7 + \beta_F) \sin \varphi_3 - L_F \sin(\varphi_7 + \beta_F) \cos \varphi_3 = (x_P - x_C) \sin \varphi_3 - (y_P - y_C) \cos \varphi_3$	Ec. 255
---	---------

Combinando las Ec. 253 y Ec. 254 se puede eliminar a y_P ó a x_P . Considerando al elemento terminal, como un triángulo equilátero, se obtiene:

$L_D \cos(\varphi_7 + \beta_D) \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - L_D \sin(\varphi_7 + \beta_D) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 = x_P \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - y_P \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$	Ec. 256
---	---------

$\begin{aligned} L_E \cos(\varphi_7 + \beta_E) \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - L_E \sin(\varphi_7 + \beta_E) \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \\ = (x_P - x_B) \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - y_P \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \end{aligned}$	Ec. 257
--	---------

Donde:

$L_D \sin(\varphi_1 - \varphi_7 - \beta_D) \cos \varphi_2 - L_E \sin(\varphi_2 - \varphi_7 - \beta_E) \cos \varphi_1 = x_P \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + x_B \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$	Ec. 258
---	---------

Combinando las Ec. 254 y Ec. 255 se puede eliminar a y_P ó a x_P .

$\begin{aligned} L_E \cos(\varphi_7 + \beta_E) \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 - L_E \sin(\varphi_7 + \beta_E) \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ = (x_P - x_B) \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 - y_P \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \end{aligned}$	Ec. 259
--	---------

$\begin{aligned} L_F \cos(\varphi_7 + \beta_F) \sin \varphi_3 \cos \varphi_2 - L_F \sin(\varphi_7 + \beta_F) \cos \varphi_3 \cos \varphi_2 \\ = (x_P - x_C) \sin \varphi_3 \cos \varphi_2 - (y_P - y_C) \cos \varphi_3 \cos \varphi_2 \end{aligned}$	Ec. 260
--	---------

En forma simplificada:

$\begin{aligned} L_E \sin(\varphi_2 - \varphi_7 - \beta_E) \cos \varphi_3 - L_F \sin(\varphi_3 - \varphi_7 - \beta_F) \cos \varphi_2 \\ = x_P \sin(\varphi_2 - \varphi_3) - x_B \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + x_C \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 - y_C \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \end{aligned}$	Ec. 261
--	---------

Combinando las Ec. 258 y Ec. 261, se obtiene:

$ \begin{aligned} & [L_D \sin(\varphi_1 - \varphi_7 - \beta_D) \cos \varphi_2 - L_E \cos(\varphi_2 - \varphi_7 - \beta_E) \cos \varphi_1] \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \\ & - [L_E \sin(\varphi_2 - \varphi_7 - \beta_E) \cos \varphi_3 - L_F \sin(\varphi_3 - \varphi_7 - \beta_F) \cos \varphi_2] \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ & = x_B \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + x_B \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ & - [x_C \sin \varphi_3 - y_C \cos \varphi_3] \cos \varphi_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} $	Ec. 262
---	---------

La Ec. 262 puede ser escrita como:

$A \sin \varphi_7 + C = B \cos \varphi_7$	Ec. 263
---	---------

Donde:

$ \begin{aligned} A = & [L_D \cos(\varphi_1 - \beta_D) \cos \varphi_2 - L_E \cos(\varphi_2 - \beta_E) \cos \varphi_1] \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \\ & - [L_E \sin(\varphi_2 - \beta_E) \cos \varphi_3 - L_F \sin(\varphi_3 - \beta_F) \cos \varphi_2] \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} $	Ec. 264
--	---------

$ \begin{aligned} B = & [L_D \sin(\varphi_1 - \beta_D) \cos \varphi_2 - L_E \sin(\varphi_2 - \beta_E) \cos \varphi_1] \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \\ & - [L_E \sin(\varphi_2 - \beta_E) \cos \varphi_3 - L_F \sin(\varphi_3 - \beta_F) \cos \varphi_2] \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} $	Ec. 265
--	---------

$ \begin{aligned} C = & x_B \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + x_B \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ & - [x_C \sin \varphi_3 - y_C \cos \varphi_3] \cos \varphi_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} $	Ec. 266
---	---------

La Ec. 263 puede ser organizada mediante:

$A^2 \sin^2 \varphi_7 + C^2 + 2AC \sin \varphi_7 = B^2(1 - \sin^2 \varphi_7)$	Ec. 267
---	---------

Ó

$(A^2 + B^2) \sin^2 \varphi_7 + 2AC \sin \varphi_7 + (C^2 - B^2) = 0$	Ec. 268
---	---------

Mediante la Ec. 268 se obtiene el ángulo de orientación del elemento terminal. Reemplazando φ_7 en Ec. 258, se obtiene la coordenada x_P del elemento terminal:

$x_P = \frac{L_D \sin(\varphi_1 - \varphi_7 - \beta_D) \cos \varphi_2 - L_E \sin(\varphi_2 - \varphi_7 - \beta_E) \cos \varphi_1 - x_B \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$	Ec. 269
---	---------

Mediante la Ec. 269 se obtiene a y_P :

$y_P = \frac{(x_P - x_B) \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - L_E \cos(\varphi_7 + \beta_E) \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + L_E \sin(\varphi_7 + \beta_E) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}$	Ec. 270
---	---------

3 – Cinemática inversa

En el análisis de la cinemática inversa, se conoce las coordenadas del elemento terminal: $[x_P, y_P, \varphi_7]$. A partir de estos datos, se requiere determinar las coordenadas de los eslabones de entrada y acopladores: $[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, f_1, f_2, f_3]$.

De las ecuaciones de enlace, Ec. 247 a Ec. 252, se obtiene:

$\varphi_1 = \text{atan}\left(\frac{y_P - L_D \sin(\varphi_7 + \beta_D)}{x_P - L_D \cos(\varphi_7 + \beta_D)}\right)$	Ec. 271
---	---------

$\varphi_2 = \text{atan}\left(\frac{y_P - L_E \sin(\varphi_7 + \beta_E)}{x_P - L_E \cos(\varphi_7 + \beta_E)}\right)$	Ec. 272
---	---------

$\varphi_3 = \text{atan}\left(\frac{y_P - L_F \sin(\varphi_7 + \beta_F)}{x_P - L_F \cos(\varphi_7 + \beta_F)}\right)$	Ec. 273
---	---------

$f_1^2 = [x_P - L_D \cos(\varphi_7 + \beta_D)]^2 + [y_P - L_D \sin(\varphi_7 + \beta_D)]^2$	Ec. 274
---	---------

$f_2^2 = [x_P - x_B - L_E \cos(\varphi_7 + \beta_E)]^2 + [y_P - L_E \sin(\varphi_7 + \beta_E)]^2$	Ec. 275
---	---------

$f_3^2 = [x_P - x_C - L_F \cos(\varphi_7 + \beta_F)]^2 + [y_P - L_F \sin(\varphi_7 + \beta_F)]^2$	Ec. 276
---	---------

4 – Análisis de velocidades

El análisis de velocidades directo requiere conocer las componentes de velocidad del punto P, $[\dot{x}_P, \dot{y}_P, \omega_7]$ en función de las velocidades de los eslabones conductores $[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$. Derivando con respecto al tiempo las ecuaciones de enlace del manipulador dadas por Ec. 247 a Ec. 253, se obtiene:

$-f_1 \sin \varphi_1 \omega_1 + \dot{f}_1 \cos \varphi_1 - L_D \sin(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7 = \dot{x}_P$	Ec. 277
--	---------

$f_1 \cos \varphi_1 \omega_1 + \dot{f}_1 \sin \varphi_1 + L_D \cos(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7 = \dot{y}_P$	Ec. 278
---	---------

$-f_2 \sin \varphi_2 \omega_2 + \dot{f}_2 \cos \varphi_2 - L_E \sin(\varphi_7 + \beta_E) \omega_7 = \dot{x}_P$	Ec. 279
--	---------

$f_2 \cos \varphi_2 \omega_2 + \dot{f}_2 \sin \varphi_2 + L_E \cos(\varphi_7 + \beta_E) \omega_7 = \dot{y}_P$	Ec. 280
---	---------

$-f_3 \sin \varphi_3 \omega_3 + \dot{f}_3 \cos \varphi_3 - L_F \sin(\varphi_7 + \beta_F) \omega_7 = \dot{x}_P$	Ec. 281
--	---------

$f_3 \cos \varphi_3 \omega_3 + \dot{f}_3 \sin \varphi_3 - L_F \cos(\varphi_7 + \beta_F) \omega_7 = \dot{y}_P$	Ec. 282
---	---------

El sistema de ecuaciones dado por las Ec. 277 a Ec. 282 se puede representar en forma matricial mediante:

$[J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i] + [J_{q,d}] \cdot [\dot{q}_d] = 0$	Ec. 283
---	---------

Donde:

$[J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i] = \begin{bmatrix} -f_1 \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ f_1 \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & -f_2 \sin \varphi_2 & 0 \\ 0 & f_2 \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & -f_3 \sin \varphi_3 \\ 0 & 0 & f_3 \cos \varphi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$	Ec. 284
--	---------

$[J_{q,d}] \cdot [\dot{q}_d] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -L_D \sin(\varphi_7 + \beta_D) & \cos \varphi_1 & 0 & 0 & \dot{x}_P \\ 0 & -1 & L_D \cos(\varphi_7 + \beta_D) & \sin \varphi_1 & 0 & 0 & \dot{y}_P \\ -1 & 0 & -L_E \sin(\varphi_7 + \beta_E) & 0 & \cos \varphi_2 & 0 & \omega_7 \\ 0 & -1 & L_E \cos(\varphi_7 + \beta_E) & 0 & \sin \varphi_2 & 0 & \dot{f}_1 \\ -1 & 0 & -L_F \sin(\varphi_7 + \beta_F) & 0 & 0 & \cos \varphi_3 & \dot{f}_2 \\ 0 & -1 & L_F \cos(\varphi_7 + \beta_F) & 0 & 0 & \sin \varphi_3 & \dot{f}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \\ \omega_7 \\ \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \\ \dot{f}_3 \end{bmatrix}$	Ec. 285
--	---------

De la Ec. 283 se obtiene:

$[\dot{q}_d] = -\text{inv}([J_{q,d}]) \cdot ([J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i])$	Ec. 286
--	---------

El análisis de velocidades inverso requiere, a partir de las componentes de velocidad del punto P, $[\dot{x}_P, \dot{y}_P, \omega_7]$, determinar las velocidades asociadas a los eslabones $[\omega_1, \dot{f}_1, \omega_2, \dot{f}_2, \omega_3, \dot{f}_3]$. En este caso, se obtiene el mismo sistema de ecuaciones del manipulador 2-RPR, por lo tanto, no se presentan estas ecuaciones.

5 – Análisis de aceleraciones

Derivando con respecto al tiempo las Ec. 277 a Ec. 282, se obtiene:

$\ddot{f}_1 \cos \varphi_1 - f_1 \sin \varphi_1 \alpha_1 - 2\dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - f_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 - L_D \sin(\varphi_7 + \beta_D) \alpha_7 - L_D \cos(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7^2 = \ddot{x}_P$	Ec. 287
---	---------

$\ddot{f}_1 \sin \varphi_1 + f_1 \cos \varphi_1 \alpha_1 + 2\dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1 - f_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 + L_D \cos(\varphi_7 + \beta_D) \alpha_7 - L_D \sin(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7^2 = \ddot{y}_P$	Ec. 288
---	---------

$\ddot{f}_2 \cos \varphi_2 - f_2 \sin \varphi_2 \alpha_2 - 2\dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2 - f_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 - L_E \sin(\varphi_7 + \beta_E) \alpha_7 - L_E \cos(\varphi_7 + \beta_E) \omega_7^2 = \ddot{x}_P$	Ec. 289
---	---------

$\ddot{f}_2 \sin \varphi_2 + f_2 \cos \varphi_2 \alpha_2 + 2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 - f_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 + L_E \cos(\varphi_7 + \beta_E) \alpha_7 - L_E \sin(\varphi_7 + \beta_E) \omega_7^2 = \ddot{y}_P$	Ec. 290
---	---------

$\ddot{f}_3 \cos \varphi_3 - f_3 \sin \varphi_3 \alpha_3 - 2\dot{f}_3 \sin \varphi_3 \omega_3 - f_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 - L_F \sin(\varphi_7 + \beta_F) \alpha_7 - L_F \cos(\varphi_7 + \beta_F) \omega_7^2 = \ddot{x}_P$	Ec. 291
---	---------

$\ddot{f}_3 \sin \varphi_3 + f_3 \cos \varphi_3 \alpha_3 + 2\dot{f}_3 \cos \varphi_3 \omega_3 - f_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 + L_F \cos(\varphi_7 + \beta_F) \alpha_7 - L_F \sin(\varphi_7 + \beta_F) \omega_7^2 = \ddot{y}_P$	Ec. 292
---	---------

Estos conjuntos de ecuaciones pueden ser expresado mediante:

$[J_{q,i}] \cdot [\ddot{q}_i] + [J_{q,d}] \cdot [\ddot{q}_d] + [\dot{J}_q] \cdot [\dot{q}] = \mathbf{0}$	Ec. 293
--	---------

Donde:

$[J_q] \cdot [\dot{q}] = \begin{bmatrix} -f_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 - 2\dot{f}_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - L_D \cos(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7^2 \\ -f_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 + 2\dot{f}_1 \cos \varphi_1 \omega_1 - L_D \sin(\varphi_7 + \beta_D) \omega_7^2 \\ -f_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 - 2\dot{f}_2 \sin \varphi_2 \omega_2 - L_E \cos(\varphi_7 + \beta_E) \omega_7^2 \\ -f_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 + 2\dot{f}_2 \cos \varphi_2 \omega_2 - L_E \sin(\varphi_7 + \beta_E) \omega_7^2 \\ -f_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 - 2\dot{f}_3 \sin \varphi_3 \omega_3 - L_F \cos(\varphi_7 + \beta_F) \omega_7^2 \\ -f_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 + 2\dot{f}_3 \cos \varphi_3 \omega_3 - L_F \sin(\varphi_7 + \beta_F) \omega_7^2 \end{bmatrix}$	Ec. 294
--	---------

De la Ec. 294 se obtiene:

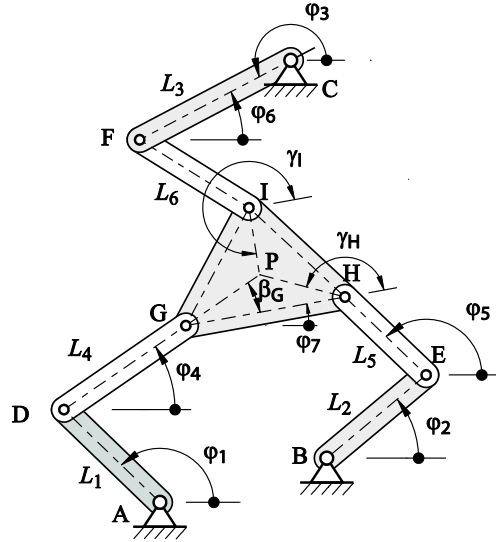
$[\ddot{q}_d] = -\text{inv}([J_{q,d}]) \cdot ([J_{q,i}] \cdot [\ddot{q}_i] + [J_q] \cdot [\dot{q}])$	Ec. 295
--	---------

4.2.3 Manipulador 3-RRR

1 – Configuración general

En la Fig. 28 se presenta el esquema general del manipulador 3-RRR; la ubicación del elemento terminal (x_P, y_P) y su orientación, dado por φ_7 , dependen de los ángulos de rotación de los eslabones conductores: φ_1, φ_2 y φ_3 . Este manipulador es analizado en [15].

Fig. 28 Esquema general del manipulador 3-RRR



2- Cinemática directa

En el análisis de la cinemática directa se tienen como datos de entrada, las coordenadas de los eslabones conductores $\mathbf{q}_i = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$; se requiere conocer las coordenadas angulares de los eslabones conducidos y la coordenadas del elemento terminal $\mathbf{q}_d = [x_P, y_P, \varphi_7, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6]^T$. Las ecuaciones de lazo del manipulador son:

$$L_1 \cos \varphi_1 + L_4 \cos \varphi_4 + L_{GP} \cos(\varphi_7 + \beta_G) - x_P = 0$$

Ec. 296

$$L_1 \sin \varphi_1 + L_4 \sin \varphi_4 + L_{GP} \sin(\varphi_7 + \beta_G) - y_P = 0$$

Ec. 297

$$x_B + L_2 \cos \varphi_2 + L_5 \cos \varphi_5 + L_{HP} \cos(\varphi_7 + \gamma_H) - x_P = 0$$

Ec. 298

$$y_B + L_2 \sin \varphi_2 + L_5 \sin \varphi_5 + L_{HP} \sin(\varphi_7 + \gamma_H) - y_P = 0$$

Ec. 299

$$x_C + L_3 \cos \varphi_3 + L_6 \cos \varphi_6 + L_{IP} \cos(\varphi_7 + \gamma_I) - x_P = 0$$

Ec. 300

$$y_C + L_3 \sin \varphi_3 + L_6 \sin \varphi_6 + L_{IP} \sin(\varphi_7 + \gamma_I) - y_P = 0$$

Ec. 301

De la suma de los cuadrados de las Ec. 296 y Ec. 297 se obtiene:

$$g_1(x_P, y_P, \varphi_7) = G_{1x}^2 + G_{1y}^2 - L_4^2 = 0$$

Ec. 302

Siendo:

$G_{1x}^2 = x_P - L_1 \cos \varphi_1 - L_{GP} \cos(\varphi_7 + \beta_G)$	Ec. 303
--	---------

$G_{1y}^2 = y_P - L_1 \sin \varphi_1 - L_{GP} \sin(\varphi_7 + \beta_G)$	Ec. 304
--	---------

De manera similar, de las Ec. 298 y Ec. 299, se obtiene:

$g_2(x_P, y_P, \varphi_7) = G_{2x}^2 + G_{2y}^2 - L_5^2 = 0$	Ec. 305
--	---------

Expresado mediante:

$G_{2x}^2 = x_P - x_B - L_2 \cos \varphi_2 - L_{HP} \cos(\varphi_7 + \gamma_H)$	Ec. 306
---	---------

$G_{2y}^2 = y_P - y_B - L_2 \sin \varphi_2 - L_{HP} \sin(\varphi_7 + \gamma_H)$	Ec. 307
---	---------

Finalmente, de la combinación de las Ec. 300 y Ec. 301 se obtiene:

$g_3(x_P, y_P, \varphi_7) = G_{3x}^2 + G_{3y}^2 - L_6^2 = 0$	Ec. 308
--	---------

Siendo:

$G_{3x}^2 = x_P - x_C - L_3 \cos \varphi_3 - L_{IP} \cos(\varphi_7 + \gamma_I)$	Ec. 309
---	---------

$G_{3y}^2 = y_P - y_C - L_3 \sin \varphi_3 - L_{IP} \sin(\varphi_7 + \gamma_I)$	Ec. 310
---	---------

Con el cual se obtiene un sistema no lineal 3x3. Este sistema se puede resolver utilizando el método de Newton-Raphson. Para este procedimiento se requiere obtener Δg_i , con $i = 1, 2, 3$, dado por:

$\Delta g_i = \frac{\partial g_i}{\partial q_j} \Delta q_j$	Ec. 311
---	---------

con $q_j = [x_P, y_P, \varphi_7]$. En el método de Newton-Raphson se realiza un proceso iterativo hasta que las funciones sean muy cercanas a cero o no exista variación en los valores de la coordenada angular. De esta forma, se tiene:

$g_{i,k+1} - g_{i,k} = \frac{\partial g_i}{\partial q_j} (q_{j,k+1} - q_{j,k})$	Ec. 312
---	---------

En forma matricial, como:

$[g]_{k+1} - [g]_k = J_q \cdot ([q]_{k+1} - [q]_k)$	Ec. 313
---	---------

siendo $J_q = \left[\frac{\partial g_i}{\partial q_j} \right]$ la matriz jacobiana

Debido a que se busca los valores de las coordenadas que hacen que las funciones g_i sean cero, se puede obtener los nuevos valores de las coordenadas mediante:

$[q]_{k+1} = [q]_k - \text{inv}(J_q) \cdot [g]_k$	Ec. 314
---	---------

La matriz jacobiana para este sistema de ecuaciones es:

$J_q = \begin{bmatrix} 2G_{1x} & 2G_{1y} & 2L_{GP} \sin(\varphi_7 + \beta_E)G_{1x} - 2L_{GP} \cos(\varphi_7 + \beta_E)G_{1y} \\ 2G_{2x} & 2G_{2y} & 2L_{HP} \sin(\varphi_7 + \gamma_H)G_{2x} - 2L_{HP} \cos(\varphi_7 + \gamma_H)G_{2y} \\ 2G_{3x} & 2G_{3y} & 2L_{IP} \sin(\varphi_7 + \gamma_I)G_{3x} - 2L_{IP} \cos(\varphi_7 + \gamma_I)G_{3y} \end{bmatrix}$	Ec. 315
---	---------

3 – Cinemática inversa

En el análisis de la cinemática inversa se tienen como datos de entrada, las coordenadas del elemento terminal, $q_s = [x_P, y_P, \varphi_7]^T$, se requiere conocer las coordenadas angulares de los eslabones conductores $q = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$.

Elevando al cuadrado, y sumando las Ec. 296 y Ec. 297, se obtiene:

$L_4^2 = (x_P - L_{GP}^2 \cos(\varphi_7 + \beta_G))^2 + (y_P - L_{GP}^2 \sin(\varphi_7 + \beta_G))^2 + L_1^2 - 2L_1 \cos \varphi_1 (x_P - L_{GP}^2 \cos(\varphi_7 + \beta_G)) - 2L_1 \sin \varphi_1 (y_P - L_{GP}^2 \sin(\varphi_7 + \beta_G))$	Ec. 316
---	---------

Organizando términos, expresados mediante:

$A + B \cos \varphi_1 = C \sin \varphi_1 = C \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1}$	Ec. 317
---	---------

Donde:

$\begin{aligned} A &= L_4^2 - (x_P - L_{GP}^2 \cos(\varphi_7 + \beta_G))^2 - (y_P - L_{GP}^2 \sin(\varphi_7 + \beta_G))^2 - L_1^2 \\ B &= 2L_1 (x_P - L_{GP}^2 \cos(\varphi_7 + \beta_G)) \\ C &= 2L_1 (y_P - L_{GP}^2 \sin(\varphi_7 + \beta_G)) \end{aligned}$	Ec. 318
--	---------

Elevando al cuadrado la Ec. 318 y organizando términos, se obtiene:

$(B^2 + C^2) \cos^2 \varphi_1 + 2AB \cos \varphi_1 + (A^2 - C^2) = 0$	Ec. 319
---	---------

La Ec. 319 tiene dos soluciones para φ_1 que se corresponden a las dos configuraciones de ensamble del manipulador.

Un procedimiento similar se implementa para determinar φ_2 . Elevando al cuadrado, y sumando las Ec. 298 y la Ec. 299, se obtiene:

$\begin{aligned} L_5^2 &= (x_P - x_B - L_{HP}^2 \cos(\varphi_7 + \gamma_H))^2 + (y_P - y_B - L_{HP}^2 \sin(\varphi_7 + \gamma_H))^2 + L_2^2 \\ &\quad - 2L_2 \cos \varphi_2 (x_P - x_B - L_{HP}^2 \cos(\varphi_7 + \gamma_H)) \\ &\quad - 2L_2 \sin \varphi_2 (y_P - y_B - L_{HP}^2 \sin(\varphi_7 + \gamma_H)) \end{aligned}$	Ec. 320
--	---------

Organizando términos como:

$A_2 + B_2 \cos \varphi_2 = C_2 \sin \varphi_2 = C_2 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_2}$	Ec. 321
---	---------

Donde:

$\begin{aligned} A_2 &= L_5^2 - (x_P - x_B - L_{HP}^2 \cos(\varphi_7 + \gamma_H))^2 - (y_P - y_B - L_{HP}^2 \sin(\varphi_7 + \gamma_H))^2 - L_2^2 \\ B_2 &= 2L_2 (x_P - x_B - L_{HP}^2 \cos(\varphi_7 + \gamma_H)) \\ C_2 &= 2L_2 (y_P - y_B - L_{HP}^2 \sin(\varphi_7 + \gamma_H)) \end{aligned}$	Ec. 322
--	---------

Elevando al cuadrado la Ec. 322 y organizando términos, se obtiene:

$(B_2^2 + C_2^2) \cos^2 \varphi_2 + 2A_2B_2 \cos \varphi_2 + (A_2^2 - C_2^2) = 0$	Ec. 323
---	---------

La Ec. 323 tiene dos soluciones para φ_2 que se corresponden a las dos configuraciones de ensamble del manipulador.

Finalmente para determinar φ_3 , se procede a elevar al cuadrado, y sumar las Ec. 300 y Ec. 301, se obtiene:

$L_6^2 = (x_P - x_C - L_{IP}^2 \cos(\varphi_7 + \gamma_1))^2 + (y_P - y_C - L_{IP}^2 \sin(\varphi_7 + \gamma_1))^2 + L_3^2 - 2L_3 \cos \varphi_3 (x_P - x_B - L_{IP}^2 \cos(\varphi_7 + \gamma_1)) - 2L_3 \sin \varphi_3 (y_P - y_B - L_{IP}^2 \sin(\varphi_7 + \gamma_1))$	Ec. 324
---	---------

Organizando términos mediante:

$A_3 + B_3 \cos \varphi_3 = C_3 \sin \varphi_3 = C_3 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_3}$	Ec. 325
---	---------

Donde:

$A_3 = L_6^2 - (x_P - x_B - L_{HP}^2 \cos(\varphi_7 + \gamma_H))^2 - (y_P - y_B - L_{HP}^2 \sin(\varphi_7 + \gamma_H))^2 - L_3^2$ $B_3 = 2L_3 (x_P - x_C - L_{IP}^2 \cos(\varphi_7 + \gamma_1))$ $C_3 = 2L_3 (y_P - y_C - L_{IP}^2 \sin(\varphi_7 + \gamma_1))$	Ec. 326
---	---------

Elevando al cuadrado la Ec. 325 y organizando términos, se obtiene:

$(B_3^2 + C_3^2) \cos^2 \varphi_3 + 2A_3B_3 \cos \varphi_3 + (A_3^2 - C_3^2) = 0$	Ec. 327
---	---------

La Ec. 327 tiene dos soluciones para φ_3 que se corresponden a las dos configuraciones de ensamble del manipulador.

4 – Análisis de velocidades

El análisis de velocidades directo requiere determinar la velocidad del elemento terminal, $[\dot{x}_P, \dot{y}_P, \omega_7]$, y las velocidades de los eslabones conducidos $[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$. Derivando con respecto al tiempo las ecuaciones de lazo, se obtiene:

$-L_1 \sin \varphi_1 \omega_1 - L_4 \sin \varphi_4 \omega_4 - L_{GP} \sin(\varphi_7 + \beta_G) \omega_7 - \dot{x}_P = 0$	Ec. 328
--	---------

$L_1 \cos \varphi_1 \omega_1 + L_4 \cos \varphi_4 \omega_4 + L_{GP} \cos(\varphi_7 + \beta_G) \omega_7 - \dot{y}_P = 0$	Ec. 329
---	---------

$-L_2 \sin \varphi_2 \omega_2 - L_5 \sin \varphi_5 \omega_5 - L_{HP} \sin(\varphi_7 + \gamma_H) \omega_7 - \dot{x}_P = 0$	Ec. 330
---	---------

$L_2 \cos \varphi_2 \omega_2 + L_5 \cos \varphi_5 \omega_5 + L_{HP} \cos(\varphi_7 + \gamma_H) \omega_7 - \dot{y}_P = 0$	Ec. 331
--	---------

$-L_3 \sin \varphi_3 \omega_3 - L_6 \sin \varphi_6 \omega_6 - L_{IP} \sin(\varphi_7 + \gamma_I) \omega_7 - \dot{x}_P = 0$	Ec. 332
---	---------

$L_3 \cos \varphi_3 \omega_3 + L_6 \cos \varphi_6 \omega_6 + L_{IP} \cos(\varphi_7 + \gamma_I) \omega_7 - \dot{y}_P = 0$	Ec. 333
--	---------

Este conjunto de ecuaciones se puede representar matricialmente como:

$[J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i] + [J_{q,d}] \cdot [\dot{q}_d] = \mathbf{0}$	Ec. 334
--	---------

Donde:

$[J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i] = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ L_1 \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & -L_2 \sin \varphi_2 & 0 \\ 0 & L_2 \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & -L_3 \sin \varphi_3 \\ 0 & 0 & L_3 \cos \varphi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$	Ec. 335
--	---------

$[J_{q,d}] \cdot [\dot{q}_d] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -L_{GP} \sin(\varphi_7 + \beta_G) & -L_4 \sin \varphi_4 & 0 & 0 & \dot{x}_p \\ 0 & -1 & L_{GP} \cos(\varphi_7 + \beta_G) & L_4 \cos \varphi_4 & 0 & 0 & \dot{y}_p \\ -1 & 0 & -L_{HP} \sin(\varphi_7 + \varphi_H) & 0 & -L_5 \sin \varphi_5 & 0 & \omega_7 \\ 0 & -1 & L_{HP} \cos(\varphi_7 + \varphi_H) & 0 & L_5 \cos \varphi_5 & 0 & \omega_4 \\ -1 & 0 & -L_{IP} \sin(\varphi_7 + \varphi_I) & 0 & 0 & -L_6 \sin \varphi_6 & \omega_5 \\ 0 & -1 & L_{IP} \cos(\varphi_7 + \varphi_I) & 0 & 0 & L_6 \cos \varphi_6 & \omega_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{bmatrix}$	Ec. 336
---	---------

De la Ec. 336 se obtiene:

$[\dot{q}_d] = -\text{inv}([J_{q,d}]) \cdot ([J_{q,i}] \cdot [\dot{q}_i])$	Ec. 337
--	---------

El análisis de velocidades inverso requiere determinar, a partir de la velocidad del elemento terminal, $[\dot{x}_p, \dot{y}_p, \omega_7]$, las velocidades de los eslabones del manipulador $[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6]$. El sistema de ecuaciones dado por las Ec. 328 a la Ec. 333, puede ser representado mediante:

$[A] \cdot [\dot{x}_p \quad \dot{y}_p \quad \omega_7]^T + [B] \cdot [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4 \quad \omega_5 \quad \omega_6]^T = \mathbf{0}$	Ec. 338
---	---------

Siendo:

$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_{GP} \sin(\varphi_7 + \beta_G) \\ 0 & 1 & -L_{GP} \cos(\varphi_7 + \beta_G) \\ 1 & 0 & L_{HP} \sin(\varphi_7 + \gamma_H) \\ 0 & 1 & -L_{HP} \cos(\varphi_7 + \gamma_H) \\ 1 & 0 & L_{IP} \sin(\varphi_7 + \gamma_I) \\ 0 & 1 & -L_{IP} \cos(\varphi_7 + \gamma_I) \end{bmatrix}$	Ec. 339
---	---------

$[B] = \begin{bmatrix} L_1 \sin \varphi_1 & 0 & 0 & L_4 \sin \varphi_4 & 0 & 0 \\ -L_1 \cos \varphi_1 & 0 & 0 & -L_4 \cos \varphi_4 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 \sin \varphi_2 & 0 & 0 & L_5 \sin \varphi_5 & 0 \\ 0 & -L_2 \cos \varphi_2 & 0 & 0 & -L_5 \cos \varphi_5 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \sin \varphi_3 & 0 & 0 & L_6 \sin \varphi_6 \\ 0 & 0 & -L_3 \cos \varphi_3 & 0 & 0 & -L_6 \cos \varphi_6 \end{bmatrix}$	Ec. 340
--	---------

Finalmente:

$[\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4 \quad \omega_5 \quad \omega_6]^T = -\text{inv}([B]) \cdot [A] \cdot [\dot{x}_p \quad \dot{y}_p \quad \omega_7]^T$	Ec. 341
---	---------

5 – Análisis de aceleraciones

Derivando con respecto al tiempo las Ec. 328 a la Ec. 333, se obtiene:

$-L_1 \sin \varphi_1 \alpha_1 - L_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 - L_4 \sin \varphi_4 \alpha_4 - L_4 \cos \varphi_4 \omega_4^2 - L_{GP} \sin(\varphi_7 + \beta_G) \alpha_7 - L_{GP} \cos(\varphi_7 + \beta_G) \omega_7^2 = \ddot{x}_P$	Ec. 342
---	---------

$L_1 \cos \varphi_1 \alpha_1 - L_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 + L_4 \cos \varphi_4 \alpha_4 - L_4 \sin \varphi_4 \omega_4^2 + L_{GP} \cos(\varphi_7 + \beta_G) \alpha_7 - L_{GP} \sin(\varphi_7 + \beta_G) \omega_7^2 = \ddot{y}_P$	Ec. 343
--	---------

$-L_2 \sin \varphi_2 \alpha_2 - L_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 - L_5 \sin \varphi_5 \alpha_5 - L_5 \cos \varphi_5 \omega_5^2 - L_{HP} \sin(\varphi_7 + \gamma_H) \alpha_7 - L_{HP} \cos(\varphi_7 + \gamma_H) \omega_7^2 = \ddot{x}_P$	Ec. 344
---	---------

$L_2 \cos \varphi_2 \alpha_2 - L_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 + L_5 \cos \varphi_5 \alpha_5 - L_5 \sin \varphi_5 \omega_5^2 + L_{HP} \cos(\varphi_7 + \gamma_H) \alpha_7 - L_{HP} \sin(\varphi_7 + \gamma_H) \omega_7^2 = \ddot{y}_P$	Ec. 345
--	---------

$-L_3 \sin \varphi_3 \alpha_3 - L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 - L_6 \sin \varphi_6 \alpha_6 - L_6 \cos \varphi_6 \omega_6^2 - L_{IP} \sin(\varphi_7 + \gamma_I) \alpha_7 - L_{IP} \cos(\varphi_7 + \gamma_I) \omega_7^2 = \ddot{x}_P$	Ec. 346
---	---------

$L_3 \cos \varphi_3 \alpha_3 - L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 + L_6 \cos \varphi_6 \alpha_6 - L_6 \sin \varphi_6 \omega_6^2 + L_{IP} \cos(\varphi_7 + \gamma_I) \alpha_7 - L_{IP} \sin(\varphi_7 + \gamma_I) \omega_7^2 = \ddot{y}_P$	Ec. 347
--	---------

ste conjunto de ecuaciones puede ser representado por:

$[J_{q,i}] \cdot [\ddot{q}_i] + [J_{q,d}] \cdot [\ddot{q}_d] + [J_q] \cdot [\dot{q}] = 0$	Ec. 348
---	---------

Donde:

$[j_q] \cdot [\dot{q}] = \begin{bmatrix} -L_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 - L_4 \cos \varphi_4 \omega_4^2 - L_{GP} \cos(\varphi_7 + \beta_G) \omega_7^2 \\ -L_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 - L_4 \sin \varphi_4 \omega_4^2 - L_{GP} \sin(\varphi_7 + \beta_G) \omega_7^2 \\ -L_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 - L_5 \cos \varphi_5 \omega_5^2 - L_{HP} \cos(\varphi_7 + \gamma_H) \omega_7^2 \\ -L_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 - L_5 \sin \varphi_5 \omega_5^2 - L_{HP} \sin(\varphi_7 + \gamma_H) \omega_7^2 \\ -L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 - L_6 \cos \varphi_6 \omega_6^2 - L_{IP} \cos(\varphi_7 + \gamma_I) \omega_7^2 \\ -L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 - L_6 \sin \varphi_6 \omega_6^2 - L_{IP} \sin(\varphi_7 + \gamma_I) \omega_7^2 \end{bmatrix}$	Ec. 349
--	---------

En el análisis de aceleraciones inverso, se tienen conocidas la aceleración del punto P (\ddot{x}_P , \ddot{y}_P , α_7), punto del elemento terminal; se requiere determinar las aceleraciones angulares de los eslabones del mecanismo $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6]$. El sistema de ecuaciones dados por las Ec. 342 a la Ec. 347, se puede representar mediante:

$[A][\ddot{x}_P \ \ddot{y}_P \ \alpha_7]^T + [C] + [B][\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6]^T = 0$	Ec. 350
--	---------

Donde:

$[C] = \begin{bmatrix} L_1 \cos \varphi_1 \omega_1^2 + L_4 \cos \varphi_4 \omega_4^2 + L_{GP} \cos(\varphi_7 + \beta_G) \omega_7^2 \\ L_1 \sin \varphi_1 \omega_1^2 + L_4 \sin \varphi_4 \omega_4^2 + L_{GP} \sin(\varphi_7 + \beta_G) \omega_7^2 \\ L_2 \cos \varphi_2 \omega_2^2 + L_5 \cos \varphi_5 \omega_5^2 + L_{HP} \cos(\varphi_7 + \gamma_H) \omega_7^2 \\ L_2 \sin \varphi_2 \omega_2^2 + L_5 \sin \varphi_5 \omega_5^2 + L_{HP} \sin(\varphi_7 + \gamma_H) \omega_7^2 \\ L_3 \cos \varphi_3 \omega_3^2 + L_6 \cos \varphi_6 \omega_6^2 + L_{IP} \cos(\varphi_7 + \gamma_I) \omega_7^2 \\ L_3 \sin \varphi_3 \omega_3^2 + L_6 \sin \varphi_6 \omega_6^2 + L_{IP} \sin(\varphi_7 + \gamma_I) \omega_7^2 \end{bmatrix}$	Ec. 3501
--	----------

Finalmente:

$[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6]^T = -\text{inv}([B]) \cdot ([A][\ddot{x}_P \ \ddot{y}_P \ \alpha_7]^T + [C])$	Ec. 352
--	---------

CAPITULO CINCO

5. SINTESIS DIMENSIONAL DE LOS MANIPULADORES

En el diseño de manipuladores es preciso tener las herramientas necesarias para poder decidir si el mecanismo cumple con los requisitos de diseño de una forma aceptable. Es preciso evaluar la calidad del movimiento de un manipulador para determinar cuál es la porción de espacio de trabajo donde es más favorable posicionar la tarea a realizar, para evitar acercarse a posiciones donde el movimiento se deteriora hasta la singularidad, para planificar las posturas más adecuadas para realizar una tarea, o para poder modificar dimensionalmente un mecanismo y mejorar su funcionamiento. A la cualidad del mecanismo que indica lo adecuado de su movimiento se le denomina destreza, siendo esta la facilidad del elemento terminal para moverse y aplicar fuerzas en cualquier dirección [21].

Para analizar el rendimiento del manipulador, previamente se debe contar con las características cinemáticas de los mismos, abordando entonces en primer lugar el uso de métodos computacionales para el cálculo de los parámetros dimensionales óptimos.

Para la síntesis dimensional del manipulador, se establece un algoritmo genético con el fin de optimizar las dimensiones de los manipuladores influyendo en él los parámetros de diseño como: cinemática, matriz jacobiana e inversa del manipulador, la destreza y el índice de transmisión de fuerza, Basado en este diseño se muestran las configuraciones de manipuladores de mejor funcionamiento acorde con los criterios establecidos en los capítulos anteriores.

A continuación, se realizará una breve descripción de los algoritmos genéticos y los índices de rendimiento.

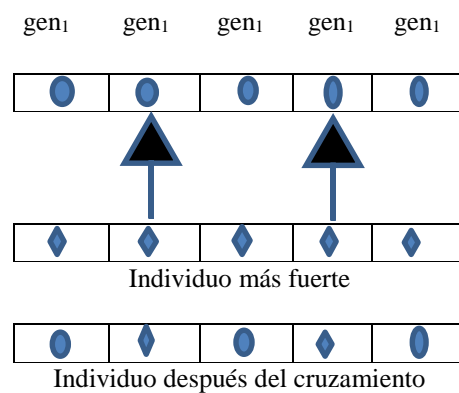
Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos son procedimientos de búsqueda basados sobre los mecanismos de selección natural y los procesos característicos de la genética natural. Estos combinan la supervivencia del gen del individuo más fuerte entre las estructuras de cadenas con un intercambio estructurado de información todavía aleatoria para crear un algoritmo de búsqueda. En cada generación, se crea un nuevo conjunto de individuos (cadenas o criaturas artificiales) usando los genes de los individuos de la generación anterior. Las operaciones básicas del procedimiento de algoritmo genético que obtienen buenos resultados están compuestas de tres etapas [22]:

1. Selección.
2. Cruzamiento.
3. Mutación.

La selección es un proceso en el cual un individuo es copiado de acuerdo con el valor de la función objetivo, de tal forma que los individuos de mejor comportamiento o funcionamiento tienen mayor probabilidad de pertenecer a la siguiente generación. Después de la selección, se utiliza la operación de cruzamiento. El cruzamiento ocurre cuando algunos genes de un individuo de la nueva población son intercambiados con el gen de otro, generalmente con el individuo más fuerte. El intercambio es aleatorio y el porcentaje de los genes intercambiados puede ser un proceso aleatorio o fijo. En la Fig. 29, se da una ilustración de la operación de cruzamiento entre dos individuos de cinco genes. Para este caso, a manera de ejemplo, se intercambiaron el segundo y cuarto gen del primer individuo por los genes del individuo de mejor comportamiento, de acuerdo a la valoración de la función objetivo.

Fig. 29 Operación de cruzamiento, algoritmos genéticos.



Después del cruzamiento se realiza la operación de la mutación. La mutación es la variación del valor de los genes de forma aleatoria. Generalmente se define una operación entre $[-\text{valor valor}]$ para cada gen con una distribución normal y de media igual a cero [23].

Destreza

El índice de destreza se define como una medida para evaluar la capacidad de un manipulador para cambiar arbitrariamente su pose. depende de la estructura del manipulador, y se puede expresar en términos de las propiedades de la matriz jacobiana. Se han propuesto varios índices para medir la destreza del manipulador, uno de los índices frecuentemente utilizados se denomina índice de condicionamiento, que se basa en el número de condición que se introdujo. el número de condición se aplica para evaluar las características de velocidad, rigidez y mapeo de precisión entre el manipulador y las variables conjuntas.

El número de condición de una matriz jacobiana de rango completo se puede definir como [24]:

$K = \ J\ \ J^{-1}\ $	Ec. 353
------------------------	---------

Donde $\|*\|$ denota la norma matricial, y la norma matriz usualmente utilizada es la norma frobenius:

$\ J\ = \sqrt{\text{tr}(J \cdot J^T / n)}$	Ec. 354
---	---------

Siendo n la dimensión de la matriz Jacobiana.

Dado que el número de condición no tiene un límite superior, su recíproco conocido como índice de acondicionamiento local (*LCI*) se utiliza con mayor frecuencia.

$LCI = \frac{1}{k}$	Ec. 355
---------------------	---------

LCI está limitado en el rango de 0 a 1, donde 0 representa la singularidad de poses y 1 denota la configuración isotrópica, por lo tanto, cuanto mayor es el valor de *LCI*, mayor es la destreza del manipulador, obviamente, *LCI* depende de las coordenadas de las articulaciones, lo que significa que depende de la postura, y se aplica para evaluar la destreza local. con el fin de evaluar la destreza global del manipulador en todo el espacio de trabajo, se propone el índice de condicionamiento global *GCI* como [24]:

$GCI = \frac{\int_w \frac{1}{k} dw}{\int_w dw}$	Ec. 356
---	---------

Donde w es el punto distribuido en el espacio de trabajo, y *GCI* denota el valor promedio de $1/k$ sobre el espacio de trabajo. teniendo en cuenta la complejidad de la forma del espacio de trabajo, el *GCI* normalmente se calcula numéricamente como:

$GCI \approx \frac{1}{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} \frac{1}{k}$	Ec. 357
--	---------

Donde N_w es igual al número de puntos uniformemente distribuidos sobre el espacio de trabajo.

Índice de transmisión de fuerza (*LTI*)

En este trabajo, se adopta la evaluación de la calidad de transmisión basada en la teoría del tornillo, con el fin de obtener una alta calidad de transmisión de fuerza / movimiento, el límite de diseño más ampliamente aceptado para el ángulo de transmisión es $[45^\circ, 135^\circ]$. el *LTI* no debe ser más pequeño que $\sin 45^\circ \approx 0.7$. El conjunto de poses se llama el buen espacio de trabajo de transmisión cuando $\gamma > 0.7$, [24].

Se define el índice de transmisión global como:

$\rho \approx \frac{1}{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} \gamma$	Ec. 358
--	---------

5.1 MANIPULADORES DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

Para la realización de la síntesis dimensional de los manipuladores de dos grados de libertad, se ha seleccionado el manipulador 2-RRR, convirtiéndolo en un ejemplo para la realización de la síntesis dimensional a las demás arquitecturas.

5.1.1 Manipulador 2-RRR

Las dimensiones del manipulador 2-RRR se obtendrán mediante un proceso de optimización basado en algoritmos genéticos [23], utilizando las dimensiones del manipulador como genes del cromosoma. El manipulador se dimensionará tal que cubra un espacio de trabajo especificado.

El espacio de trabajo debe cubrir una elipse con centro en 120,103, con semiejes $a=60$ y $b=40$, y con un ángulo de inclinación de 15° con la horizontal, en la Fig. 10 (d), se muestra el espacio de trabajo.

La función objetivo busca minimizar las dimensiones de los eslabones, aumentar la destreza y el índice de transmisión de fuerza.

En este caso se crea una función objetivo definida como:

$f = f_{long} + f_{ITF} + f_{dest} + f_{cond}$	Ec. 359
--	---------

Donde f , es el valor de la función objetivo, f_{long} es el valor de la función dependiente de las longitudes del manipulador, f_{ITF} es el valor de la función correspondiente al índice de transmisión de fuerza, f_{dest} es el valor de la función respecto a la destreza del manipulador y f_{cond} es una condición que toma el valor 0 si el manipulador cubre el espacio de trabajo y 100 si no.

El criterio para tener en cuenta la dimensión, está dado mediante:

$f_{long} = \frac{2 * L_1 + 2 * L_3 + L_0}{200 * W_{long}}$	Ec. 360
---	---------

Donde W_{long} es el factor de peso de las longitudes igual a 0,1.

El índice de transmisión de fuerza está dado por:

$f_{ITF} = (pi - valor \gamma_{1,3} - valor \gamma_{2,4}) * W_{ITF} + (pi - prom \gamma_{1,3} - prom \gamma_{2,4}) * W_{ITF}$	Ec. 361
---	---------

Donde W_{ITF} es el factor de peso del índice de transmisión de fuerza igual a 1, $valor \gamma$ es igual al valor del seno del ángulo formado entre los eslabones correspondientes y $prom \gamma$ es igual al seno del ángulo formado entre los eslabones correspondientes dividido todos los puntos dentro de la elipse.

La destreza se obtiene como:

$f_{dest} = suma * W_{dest}$	Ec. 362
------------------------------	---------

Donde W_{dest} es el factor de peso de la destreza igual a 3.

$suma = suma + \frac{MK}{individuos \text{ dentro del elipsoide}}$	Ec. 363
--	---------

Donde:

$MK = 1 - \frac{1}{k}$	Ec. 364
------------------------	---------

La condición está dada por:

$r_{AP} < r_{min} \vee r_{AP} > r_{max} \vee r_{BP} < r_{min} \vee r_{BP} > r_{max}$	Ec. 365
--	---------

Donde r_{AP} , r_{BP} son las distancias desde las manivelas hasta el actuador final respectivamente, $r_{min} = L_3 - L_1$ y $r_{max} = L_3 + L_1$.

Para garantizar que las dimensiones de una solución particular, abarca el espacio de trabajo, se debe crear una población de cromosomas (individuos) que para este caso contará con un número de 60, además, se agrega el número de genes de cada cromosoma con un número 5 y su respectivo rango de variación, ver tabla 8, donde serán seleccionados aleatoriamente mediante: ver Ec. 366.

Tabla 8. Genes y rango del manipulador 2-RRR

Genes	L_1 [mm]	L_3 [mm]	L_0 [mm]	x_A [mm]	y_A [mm]
Rango	[30, 60]	[60, 120]	[80, 140]	[-50, 50]	[-50, 50]

Siendo las dimensiones de la manivela como: $L_2 = L_1$, y las dimensiones de los acopladores como: $L_4 = L_3$.

$Matriz\ de\ poblacion\ (M_p) = V_{inf} + (V_{sup} - V_{inf}) * rand$	Ec. 366
---	---------

Siendo V_{inf} y V_{sup} los límites de los rangos de los genes respectivamente, y rand un número aleatorio que varía entre 0 y 1.

Etapas de selección

Al llegar a esta etapa debe existir una población, ver Ec. 366, la cual es evaluada y ordenada acorde con el valor de la función objetivo. El individuo más fuerte es el que tiene el menor valor de la función objetivo, además, los 10 individuos más débiles de la población serán reemplazados por otros nuevos seleccionados aleatoriamente para mejorar la población, esta operación se repite hasta terminar con el número de iteraciones deseadas.

Etapas de cruzamiento

En esta etapa se realiza la operación cruzamiento sobre el 30% de los genes, elegidos aleatoriamente, al individuo más fuerte no se le modifican los genes, a los demás, se les realiza la operación y son ordenados de acuerdo al valor de su función objetivo.

Etapas de mutación

Se realiza la operación mutación sobre el 40% de los genes, elegidos aleatoriamente. El individuo más fuerte no se modifica genéticamente, mientras que los demás sufren las alteraciones. La operación mutación se obtiene como:

$matriz\ de\ poblacion\ mutada\ (M_{pm}) = M_p + rango * 0.25(rand - 0.5)$	Ec. 367
--	---------

Siendo el $rango = V_{sup} - V_{inf}$ y 0.25 un coeficiente tomado arbitrariamente.

La Ec. 367 debe cumplir las siguientes condiciones:

Si $M_{pm} > V_{sup}$, hacer $M_{pm} = V_{sup}$, y si $M_{pm} < V_{inf}$, hacer $M_{pm} = V_{inf}$

Datos obtenidos.

En la tabla 9, se muestran los valores de diseño óptimos para el manipulador 2-RRR obtenidos mediante la utilización de algoritmos genéticos.

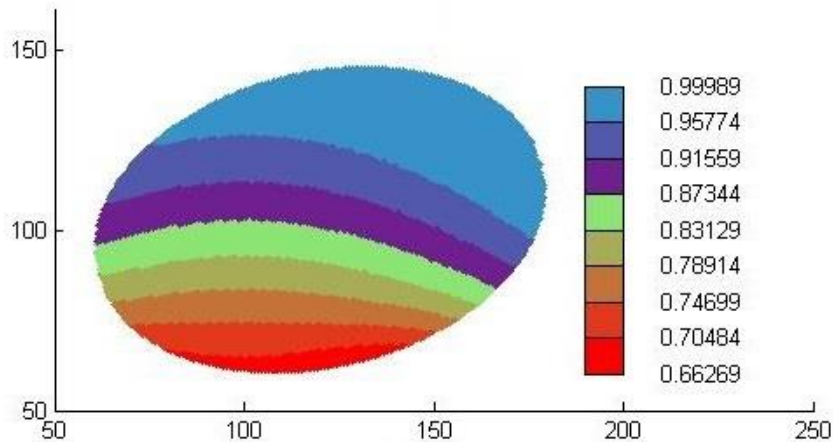
Tabla 9. Valores de diseño del manipulador 2-RRR

L_1 [mm]	L_3 [mm]	L_0 [mm]	x_A [mm]	y_A [mm]
78,904	136,2058	100	50	-5,9704

destreza

Para el cálculo de la destreza o índice de condicionamiento se necesita el jacobiano del manipulador 2-RRR, ver Ec. 79 y Ec. 80. En la Fig. 30 se muestra la destreza del manipulador 2-RRR dentro de la elipse de manipulabilidad, puede observarse como la destreza toma valores cercanos a 1 y a medida que el manipulador se acerca a sus singularidades la destreza va disminuyendo paulatinamente, aunque se recalca su óptimo esfuerzo al no estar por debajo del 50% de su totalidad dentro de la elipse.

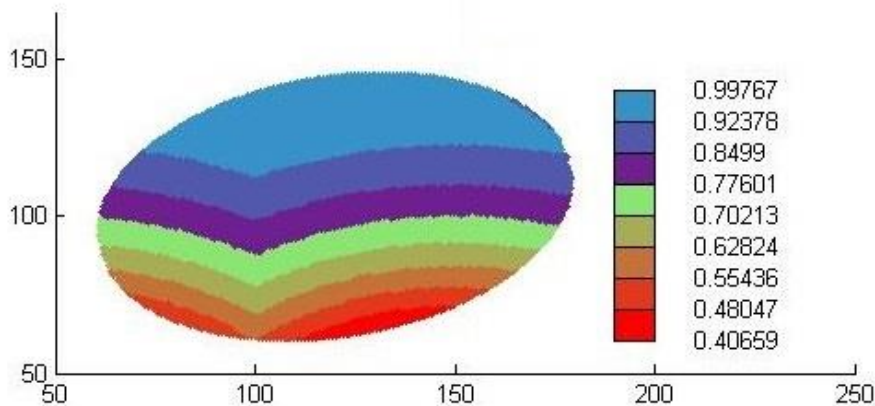
Fig. 30 Mapa de destreza en la elipse de manipulabilidad del manipulador 2-RRR



Índice de transmisión de fuerza

En la Fig. 31 se muestra el índice de transferencia de fuerza (*IFT*) del manipulador 2-RRR dentro de la elipse de manipulabilidad, puede observarse como el *IFT* toma valores cercanos a 1 en la zona de la elipse que está más alejada de las singularidades que se presentan en el manipulador.

Fig. 31 Mapa del índice de transferencia de fuerza en la elipse de manipulabilidad del manipulador 2-RRR



A las configuraciones de manipuladores de dos grados de libertad restantes por la síntesis dimensional se les realiza el mismo procedimiento para lograr encontrar un óptimo diseño.

5.2 MANIPULADORES DE TRES GRADOS DE LIBERTAD

En las 3 arquitecturas de manipuladores paralelos planos ya mencionadas en capítulos anteriores por poseer un mejor funcionamiento sobre las demás; Se ha seleccionado el manipulador 3-RRR para realizar los respectivos análisis de diseño y a las demás arquitecturas solo restaría implementar el mismo procedimiento.

5.2.1 Manipulador 3-RRR

Las dimensiones del manipulador 3-RRR se obtendrán mediante un proceso de optimización basado en algoritmos genéticos [23], utilizando las dimensiones del manipulador como genes del cromosoma. El manipulador se dimensionará tal que cubra un espacio de trabajo especificado.

El espacio de trabajo debe cubrir una elipse con centro en 120,103, con semiejes $a=60$ y $b=40$, y con un ángulo de inclinación de 15° con la horizontal, en la Fig. 13 (c), se muestra el espacio de trabajo.

La función objetivo busca minimizar las dimensiones de los eslabones, aumentar la destreza y el índice de transmisión de fuerza.

En este caso se crea una función objetivo definida como:

$f = f_{long} + f_{ITF} + f_{dest} + f_{cond}$	Ec. 368
--	---------

Donde f , es el valor de la función objetivo, f_{long} es el valor de la función dependiente de las longitudes del manipulador, f_{ITF} es el valor de la función correspondiente al índice de transmisión de fuerza, f_{dest} es el valor de la función respecto a la destreza del manipulador y f_{cond} es una condición que toma el valor 0 si el manipulador cubre el espacio de trabajo y 100 si no. El criterio para tener en cuenta la dimensión, está dado mediante:

$f_{long} = \frac{3 * L_1 + 3 * L_4 + 2 * L_7}{200 * W_{long}}$	Ec. 369
---	---------

Donde W_{long} es el factor de peso de las longitudes igual a 0.1.

El índice de transmisión de fuerza está dado por:

$f_{ITF} = (pi - valor \gamma_{1,4} - valor \gamma_{2,5} - valor \gamma_{3,6}) * W_{ITF} * 0.6$ $+ (pi - prom \gamma_{1,4} - prom \gamma_{2,5} - prom \gamma_{3,6}) * W_{ITF} * 0.4$	Ec. 370
---	---------

Donde W_{ITF} es el factor de peso del índice de transmisión de fuerza igual a 2, *valor* γ es igual al valor del seno del ángulo formado entre los eslabones correspondientes y *prom* γ es igual al seno del ángulo formado entre los eslabones correspondientes dividido todos los puntos dentro de la elipse.

La destreza se obtiene como:

$f_{dest} = suma * W_{dest}$	Ec. 371
------------------------------	---------

Donde W_{dest} es el factor de peso de la destreza igual a 1.

$suma = suma + \frac{MK}{individuos \text{ dentro del elipsoide}}$	Ec. 372
--	---------

La condición está dada por:

$r_{AP} < r_{min} \vee r_{AP} > 0,95 * r_{max} \vee r_{BP} < r_{min} \vee r_{BP} > 0,95 * r_{max} \vee r_{CP} < r_{min} \vee r_{CP} > 0,95 * r_{max}$	Ec. 373
---	---------

Donde r_{AP} , r_{BP} , r_{CP} , son las distancias desde las manivelas hasta el actuador final respectivamente, $r_{min} = L_4 - L_1 + 0,15 * L_7$ y $r_{max} = L_4 + L_1 + 0,15 * L_7$.

Para garantizar que las dimensiones de una solución particular, abarca el espacio de trabajo, se debe crear una población de cromosomas (individuos) que para este caso contará con un número de 300, además, se agrega el número de genes de cada cromosoma con un numero 7 y su respectivo rango de variación, ver tabla 10, donde serán seleccionados aleatoriamente mediante: ver Ec. 366.

Tabla 10. Genes y rango del manipulador 3-RRR

Genes	L_1 [mm]	L_4 [mm]	L_0 [mm]	x_A [mm]	y_A [mm]	L_7 [mm]	y_C [mm]
Rango	[30, 150]	[40, 200]	[40, 250]	[-100, 50]	[-50, 50]	[40, 100]	[200, 500]

Siendo las dimensiones de las manivelas como: $L_2 = L_1$, $L_3 = L_1$, y las dimensiones de los acopladores como: $L_5 = L_4$ y $L_6 = L_4$. La coordenada de la manivela C sobre el eje horizontal está dada por:

$x_C = x_A + \frac{L_0}{2}$	Ec. 374
-----------------------------	---------

La longitud de los acopladores al actuador final está expresada mediante:

$L_{7m} = \frac{L_7 * \sin(beta)}{\sin(pi - 2 * beta)}$	Ec. 375
---	---------

Siendo $beta = \frac{\pi}{6}$.

Luego de realizar el mismo procedimiento que en el sub-capítulo anterior obtuvimos los siguientes resultados:

Datos obtenidos.

En la tabla 11, se muestran los valores de diseño óptimos para el manipulador 3-RRR obtenidos mediante la utilización de algoritmos genéticos.

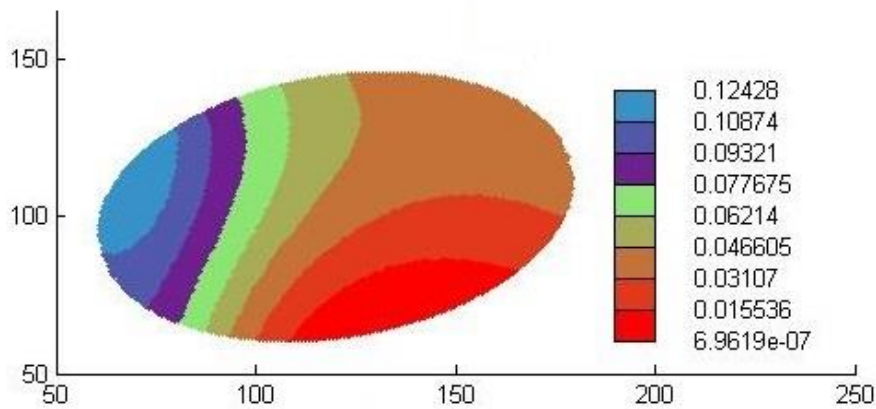
Tabla 11. Valores de diseño del manipulador 3-RRR

L_1 [mm]	L_4 [mm]	L_0 [mm]	x_A [mm]	y_A [mm]	L_7 [mm]	y_C [mm]
104,6003	123,5898	156,9769	49,8532	-50	40	281,2105

Destreza

Para el cálculo de la destreza o índice de condicionamiento se necesita el jacobiano del manipulador 3-RRR, ver Ec. 315. En la Fig. 32 se muestra la destreza del manipulador 3-RRR dentro de la elipse de manipulabilidad en el manipulador 3-RRR.

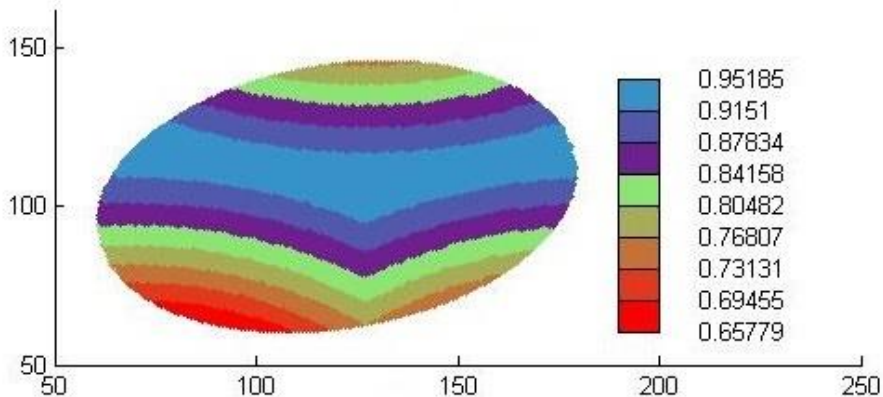
Fig. 32 Mapa de destreza en la elipse de manipulabilidad del manipulador 3-RRR



Índice de transmisión de fuerza

En la Fig. 33 se muestra el índice de transferencia de fuerza (*IFT*) del manipulador 3-RRR dentro de la elipse de manipulabilidad, puede observarse como el *IFT* toma valores cercanos a 1 y a medida que el manipulador se acerca a sus singularidades el *IFT* va disminuyendo paulatinamente, aunque se recalca su óptimo esfuerzo al no estar por debajo del 50% de su totalidad dentro de la elipse.

Fig. 33 Mapa del índice de transferencia de fuerza en la elipse de manipulabilidad del manipulador 3-RRR



A las configuraciones de manipuladores de tres grados de libertad restantes por la síntesis dimensional se les realiza el mismo procedimiento para lograr encontrar un óptimo diseño.

6. CONCLUSIONES, APORTES Y RECOMENDACIONES

A continuación, exponemos las ideas del proyecto de investigación a modo de conclusiones.

6.1 CONCLUSIONES

6.1.1

Durante el desarrollo de los objetivos del trabajo y teniendo en cuenta la especial problemática que tiene la región en cuanto a automatización, este trabajo toma como punto de partida el gran potencial que poseen los manipuladores paralelos para una viable implementación en la industria, y se recalca la necesidad en las empresas de tecnificar y mejorar la industria en cuanto a producción y realización de tareas manuales que pueden ser reemplazadas, con énfasis en los sectores de empaquetamiento, manufactura, autopartes y agroindustria.

6.1.2

Se evidencia que el estudio y análisis de la síntesis de los manipuladores se logra reunir un grupo de diferentes arquitecturas que presentan ventajas de funcionamiento sobre las demás y que pueden ser las de mayor viabilidad para lograr el objetivo de este trabajo, gracias al análisis de manipulabilidad o espacio de trabajo de los mismos, en donde los manipuladores con mayor índice de manipulabilidad eran seleccionados para los siguientes análisis respectivos. Luego se procede a plasmar las ventajas cinemáticas de los manipuladores donde se evidencia las grandes ventajas de diseño que poseen y las grandes tasas de rendimiento óptimo presentes en cada uno de ellos.

6.1.3

Una contribución de los métodos computacionales es el análisis dimensional de los manipuladores y la combinación de diferentes características y parámetros se logra alcanzar el diseño óptimo de los manipuladores, obteniendo excelentes resultados en los manipuladores de dos grados de libertad, y en los manipuladores de tres grados de libertad debido a que posee variables de salida angulares sus resultados no fueron los deseados.

6.2 APORTES

6.2.1

En primer lugar, se seleccionan los sectores industriales con mayor potencial de automatización, en donde la mano de obra sea reducida, la calidad, velocidad del proceso sean aumentados y en los cuales se hace más viable la implementación de manipuladores planos paralelos y espaciales.

6.2.2

Se realizaron encuestas en diferentes empresas de la región obteniendo información sobre las actividades industriales que poseen potencial de automatización en las cuales es viable la implementación de manipuladores paralelos planares y espaciales.

6.2.3

Para la interpretación de la información se utilizó una tabla de selección la cual aporta las ventajas de las diferentes morfologías, dando a conocer sus características y la viabilidad de implementación en la industria que poseen sobre las demás.

6.2.4

Abordando la síntesis dimensional se utilizó un programa computacional “Matlab” con el fin de buscar los parámetros geométricos óptimos del manipulador.

6.3 RECOMENDACIONES

6.3.1

Persuadir a las diferentes empresas con mayor necesidad de adquisición de tecnología, y con el soporte de esta investigación, que adopten los manipuladores paralelos para su crecimiento y desarrollo en la productividad.

6.3.2

El aumento al estudio de números de grados de libertad en los manipuladores paralelos, para abarcar así una mayor variedad en los campos de la industria, donde el potencial de ellos tendría un impacto más favorable.

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. Merlet, «Interval analysis for certified numerical solution of problems in robotics,» *Journal of Applied Mathematics Computer Sciences*, vol. 19, nº 3, pp. 399-412, 2009.
- [2] MCKinsey&Company, UN FUTURO QUE FUNCIONA:AUTOMATIZACION, EMPLEO Y PRODUCTIVIDAD, ENERO, 2017.
- [3] A. Vivas, Robotica Paralela: Aplicaciones industriales, modelado y control; Trabajo de grado, Departamento de electronica,instrumentacion y control, Universidad del Cauca, Colombia.
- [4] G. Cornejo, «scribd,» scribd niveles de automatizacion, 25 enero 2017. [En línea]. Available: <https://es.scribd.com/document/337538712/Niveles-de-Automatizacion>.
- [5] O. Salgado, Sintesis, Analisis y diseño de manipuladores paralelos de baja movilidad; Tesis doctoral, Departamento de Ingenieria Mecanica, Universidad del Pais Vasco., Bilbao, 2008.
- [6] M. Tannaus, S. Caro y A. Goldsztejn, «Sensitivity analysis of parallel manipulators using an interval linearization method,» *Mechanism and Machine Theory*, vol. 71, pp. 93-114, 2014.
- [7] S. Rao y P. K. Bhati, «Probabilistic approach to manipulators kinematics and dynamics,» *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 72, nº 1, pp. 47-58.
- [8] S. Caro, N. Binaud y P. Wenger, «Sensitivity analysis of 3-RPR planar parallel manipulators,» *Journal of Mechanical Design*, vol. 13, nº 12, p. 121005 1 – 121005 13, 2009.
- [9] M. Raghavan, Stewart platform of general geometry has 40 configurations. *Journal of Mechanical Design*, Transactions of the ASME., 1993. 115(2): p. 277-280. .
- [10] L. Tsai, Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators., 1999: Wiley. .
- [11] J. Angeles, Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory, Methods and Algorithms. Second Edition ed, ed. F. F. Ling2002:Springer..
- [12] Campos, A., R. Guenther, and D. Martins, Differential kinematics of serial manipulators using virtual chains.*Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2005. 27(4): p. 345-356..
- [13] D. A. Serrato Tobón, «Diseño, construcción y pruebas de un manipulador plano de 2 grados de libertad tipo RPR,» Trabajo de grado, Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Tecnológica de Pereira, 2015.
- [14] L. Rolland y R. Chandra, «Forward kinematics of the 3 RPR planar parallel manipulators using real coded genetic algorithms,» de *In Proc of the 24th International Symposium on Computer and Information Sciences*, 2009. ISCIS 2009, 381-386, Guzelyurt Sept 14-16, 2009.
- [15] L. C. Burbano y R. P. Trullo, «Diseño, Construcción y pruebas de un manipulador paralelo plano de tres grados de libertad, tipo RRR,» de *Trabajo de grado, Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Tecnológica de Pereira*, 2016.
- [16] K. H. Hunt, «Structural kinematics of in parallel actuated robot arms,» *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, vol. 105, nº 4, pp. 705--712, 1983.
- [17] W. P. Koevarmans, «Design and performance of the four dof motion system of the NLR research flight simulator,» de *AGARD Conference Proceedings*, La Haya, 1975.
- [18] L. Nurahmi, S. Caro, P. Wenger, J. Schadlbauer y M. Husty, «Reconfiguration analysis of a 4-RUU parallel manipulator,» *Mechanism and Machine Theory*, vol. 96, pp. 269-289, 2016.
- [19] L. A. Silva, Control visual de robots paralelos. Análisis, desarrollo y aplicaciones a la plataforma RoboTenis, Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid, 2005.

- [20] H. D. Taghirad, Parallel robots: Mechanics and control, Danvers, MA, USA: CRC Press, 2013, p. 508.
- [21] D. E. GOLDBERG, Genetic Algorithms: in Search, Optimization, and Learning., USA: Addison Wesley Publishing company, 1989.
- [22] H. F. Quintero, G. Calle y A. Diaz, SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE TRAYECTORIA Y DE MOVIMIENTO PARA MÚLTIPLES POSICIONES EN MECANISMOS, UTILIZANDO ALGORITMOS GENÉTICOS, Pereira, Colombia: Scientia et Technica Año X, No 25, 2004.
- [23] X. Wu, Z. Xie, J. A. Kepler y S. Bai, Aparametric model of 3-RRR planar parallel manipulators for optimun shape desing of platforms, China: ELSEIVER, 2017.
- [24] R. W. Brockett y F. C. Park, Kinematic dexterity of robotic mechanisms, EEUU: International journal od robotics researc, 1994.
- [25] T. B. Sheridan. y. C. D. Wickens. ,. v. 3. n. 3. p. 2.-2. R. Parasuraman, «A model for types and levels of human interaction with automation,» IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems ans Humans, vol. 30, n°3, pp. 286-297, 2000.